University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Jalons pour l'apprentissage et l'enseignement des fonctions dans le secondaire

Noël, Aurélie

Award date:
2003

FUNDP
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B-5000 Namur Belgique

JALONS POUR L'APPRENTISSAGE ET L'ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS DANS LE SECONDAIRE

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

Aurélie NOËL

Promoteur : **M. SCHNEIDER**
Directeur : **M. KRYSINSKA**

Année Académique 2002-2003

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux professeurs et élèves qui m'ont intégrée de façon si agréable à leur travail, me faisant vivre ce qu'est une classe heureuse.

Un merci tout particulier à Madame le professeur Maggy Schneider pour l'aide, la patience et les conseils judicieux qu'elle m'a apportés tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Un merci également à Madame Krysinska pour les avis qu'elle m'a dispensés. Merci aussi pour m'avoir autorisée à observer ses élèves.

Merci à Madame Rosseel qui nous a accueillies dans sa classe pour des observations.

Merci à tous ceux qui m'ont accompagnée et soutenue durant ces quatre années d'étude, ma famille, mes amis et surtout à Bomp qui m'a sans doute transmis la passion pour les mathématiques.

Résumé

Quelques jalons ont été posés pour clarifier les difficultés éprouvées par les élèves à propos du concept de fonction et de son usage dans la modélisation de problèmes concrets. La méthodologie a consisté :

- d'une part à analyser le caractère épistémologique des difficultés répertoriées par Anna Sierpinska en référence à des activités proposées dans certains manuels qui octroient une place importante à la modélisation.
- d'autre part à expérimenter et analyser comment l'usage des calculatrices graphiques pouvait aider les élèves à étudier différentes fonctions classe par classe.

Abstract

Some basis have been posed to clarify the difficulties encountered by students concerning the concept of function and its use in the modelisation of concrete problems. The methodology has consisted in :

- one the one hand, analysing the epistemological nature of the difficulties listed by A. Sierpenska, in reference to activities proposed by some manuals that grant an important place to the modelisation.
- on the other hand, testing and analysing how graphic calculators could help students to study different functions, class by class.

Errata

page 16 : dernier paragraphe :

$(x_0, f(x_0))$

page 22 : dernier paragraphe :

une vitesse

page 24 : deuxième paragraphe :

une horloge

page 32 : dernier paragraphe :

supprimer les guillemets après esprit.

page 40 : dernière ligne :

supprimer la parenthèse après les 3 points.

page 68 : Point 2.5 : deuxième ligne

représentation

page 109 : deuxième paragraphe

$$\frac{y'}{a} = x'^2$$

Table des matières

Introduction

La décision d'embrasser une carrière dans l'enseignement prise, le choix de mon mémoire s'est directement orienté vers la didactique avec comme sujet, les fonctions.

Les raisons de ce choix sont les suivantes :

1. Il s'agit d'un concept unificateur non seulement en analyse mais aussi dans les autres sous-branches des mathématiques comme l'ont développé les bourbakistes. Par exemple, en géométrie, les transformations du plan sont des fonctions tout comme les probabilités le sont aussi.
2. Les fonctions sont des outils puissants pour modéliser les phénomènes et situations de la vie courante ou relevant d'autres disciplines.
3. Le sujet des fonctions est intégré et mobilisé au sein des matières de chaque année du cycle secondaire.

Quant à la méthodologie utilisée, comme premier point de départ, je me suis servie du relevé de difficultés rencontrées par les élèves dans l'étude des fonctions selon l'article de A. Sierpinska.
Mais à ce stade, la question posée est : les difficultés énoncées sont-elles incontournables ? Sont-elles des conséquences de l'enseignement tel qu'il est dispensé ?

Ma deuxième référence fut le projet du groupe AHA qui met en évidence deux approches. D'une part, la fonction est un outil pour résoudre des problèmes y compris ceux de la vie courante et d'autres disciplines. D'autre part, dans ce projet, les fonctions sont étudiées classe par classe et en rapport avec des phénomènes particuliers.
Par exemple, les fonctions trigonométriques sont traitées dans le cadre des phénomènes périodiques ; les fonctions exponentielles sont étudiées via les problèmes de croissance de population, ou encore les fonctions affines par morceaux sont travaillées à l'aide des problèmes de "tarification".

Première partie

Traduction et analyse de l'article d'Anna Sierspinska sur les obstacles rencontrés par les élèves lors de l'étude des fonctions

Chapitre 1

Traduction de l'article d'Anna Sierpinska

1.1 Le concept de fonction

Aspects de l'épistémologie et de la pédagogie.

1.1.1 La compréhension de la notion de fonction.

Les difficultés des étudiants avec la notion de fonction sont largement rapportées et bien connues. Les étudiants ont des difficultés à faire le lien entre les différentes représentations des fonctions : formules, graphiques, diagrammes, description de relations à l'aide de mots ; à interpréter des graphiques ; à manipuler des symboles reliés aux fonctions tels que : $f(x) : x \Rightarrow y$, $sin(x+t)$, etc.

Le langage utilisé en rapport avec les fonctions n'est pas efficace, à la fois $f(x)$ est le nom d'une fonction et la valeur de la fonction f. Dans des situations spontanées, les étudiants utilisent différents symboles et différents langages. Pour dire que la valeur de la fonction en 2 est 3, ils écriraient : "$x(2) = 3$". Cela devrait être lu : "Mettez 2 à la place de x dans la formule de la fonction. Vous obtenez 3." Le concept de valeur de fonction est étroitement lié à l'activité de calcul de la valeur, si la formule est donnée. Pour exprimer $f(x)$, ils diraient : "Vous mettez 2 dans la formule de la fonction et vous calculez. Vous obtenez un nombre."

La question pédagogique est, bien sûr, comment affronter toutes ces difficultés en classe. Beaucoup de personnes ont essayé de rencontrer cette question de façons différentes, certaines assez malignes et astucieuses (par exemple, les séries SMP ou les publications du Centre Shell) utilisant la résolution de problèmes, les calculatrices et les ordinateurs. Ces solutions pédagogiques étaient même parfois expérimentées dans la classe et cela a certainement eu un impact sur leur forme finale. Il me semble, néanmoins, qu'une évaluation du projet d'enseignement supposé promouvoir la compréhension des fonctions chez les étudiants, doit être basée sur un schéma de travail qui lui est externe. Elle doit être basée sur une réflexion au sujet de, premièrement, la compréhension et, deuxièmement, les fonctions. Nous devons répondre aux questions : Qu'est-ce qui doit être compris ? Ou : Que voulons-nous dire par " comprendre " ? Et : Que voulons-nous dire par compréhension des fonctions ? Nous devons avoir une théorie à propos de la compréhension et à propos de la compréhension des fonctions sur laquelle construire ou évaluer nos projets. Ce texte propose une telle théorie. Il propose un certain point de vue sur la compréhension des mathématiques en général, et sur la compréhension des fonctions en particulier.

1.1.2 La compréhension en général

Comment parvenons-nous à comprendre un concept mathématique ? C'est en lisant sa définition ? Quelqu'un fortement impliqué dans l'enseignement dirait "oui".

C'est seulement quand nous avons vu les exemples et les contre-exemples d'un objet défini, quand nous pouvons dire ce que cet objet est et ce qu'il n'est pas, quand nous avons pris conscience de ses relations avec d'autres concepts, quand nous avons remarqué que ces relations sont analogues aux relations qui nous sont familières, quand nous avons compris la position que l'objet défini a à l'intérieur d'une théorie et quelles sont ses applications possibles, que nous pouvons dire que nous avons compris quelque chose à ce sujet.

Quelques personnes ont mentionné l'idée que ce qui est important dans les processus d'enseignement et de création des mathématiques, ce sont les discontinuités, plus que les longues périodes, où un progrès sérieux (ou régression ou stagnation) est en train de prendre place. Willem Kuyk (1982), qui a élaboré un modèle de catastrophe cuspide de concentration mathématique et de découverte, écrit : "Dans l'apprentissage mathématique du saut les caractéristiques sont proéminentes : la soudaine reconnaissance d'un modèle dans la résolution de problèmes, mais aussi la découverte que certaines caractéristiques correspondent à un schéma de travail compréhensible, sont des exemples ".

Je partage cette opinion et c'est pourquoi, dans la discussion au sujet de la compréhension des mathématiques, je voudrais me concentrer sur les sauts, c'est-à-dire, sur les changements qualitatifs importants en rapport avec les connaissances mathématiques dans l'esprit humain, les sauts d'anciennes méthodes de connaissance vers les nouvelles méthodes de connaissance.

Il y a deux manières complémentaires de regarder ces sauts. Si, une fois que nous connaissons une nouvelle méthode, nous contemplons nos vieilles méthodes de connaissance, ce que nous voyons ce sont des choses qui nous ont empêché de connaître d'une nouvelle manière. Certaines de ces choses peuvent être qualifiées d'obstacles épistémologiques. Mais si, à la place de méditer sur les erreurs du passé, nous jetons un oeil sur ce qui est en face de nous, alors, nous avons tendance à décrire le saut en termes de nouvelles méthodes de connaissance.

L'image ancienne sera considérée comme une action de surmonter une difficulté ou un obstacle. Celle-ci est un acte de compréhension. Les images sont complémentaires parce qu'aucune d'elles , seule, ne donne un compte rendu complet du saut ; les deux sont nécessaires pour décrire ce qui s'est passé. Et si l'obstacle ou la difficulté est en opposition avec la nouvelle méthode de connaissance, il est incompatible avec elle.

Donc, en essayant de décrire ce que signifie comprendre un concept particulier en mathématique, une bonne attention devrait être donnée aux deux images : la compréhension et les façons de surmonter les difficultés ou les obstacles. Cependant, je confinerai ma discussion des obstacles aux obstacles épistémologiques, comme ils semblent appartenir à la signification des concepts eux-mêmes, ils ne sont pas seulement les résultats de manières particulières d'enseigner ceux-ci, et ils ne sont pas particuliers, ce n'est pas quelque chose qui arrive à une ou deux personnes. Ils sont communs dans la structure d'une certaine culture, à la fois dans le présent ou dans le passé et donc semblent être les obstacles les plus objectifs à une nouvelle méthode de connaissance.

1.1.3 D'où viennent les obstacles épistémologiques ?

En tout, nous connaissons trois niveaux qui peuvent être distingués : le premier est celui des attitudes, croyances et convictions de notre champ de vision. Ce sont les connaissances explicites ou explicables. Elles peuvent être communiquées aux autres dans des déclarations claires (comme : "les mathématiques sont le langage des sciences"). Mais ces déclarations ne font pas appel à une justification autre que la référence à une autorité, une tradition, ou un sens commun : "Tout le monde connaît". Un autre niveau est celui (principalement inconscient) des schémas de pensée, les manières d'approcher les problèmes, d'interpréter les situations, les choses qui sont apprises par la pratique et l'imitation au cours de notre socialisation et éducation. Le troisième niveau est celui de la connaissance technique, comme Hall le dit, celui des connaissances dont la valeur et la validité est établie par des critères plus rationnels tels que la consistance, l'applicabilité et les types de relations avec les systèmes de connaissances socialement qualifiées de scientifiques. Ce sont aussi des connaissances explicites, mais à l'inverse des connaissances du premier niveau, elles demandent une justification rationnelle (le terme rationnel a eu différentes significations dans les différentes cultures et le temps).

Les trois niveaux ne sont pas indépendants. Une grande partie de ce que nous faisons au niveau technique, les problèmes et les concepts sur lesquels nous nous concentrons, les méthodes avec lesquelles nous résolvons les problèmes peuvent être expliqués par les contenus des premier et deuxième niveaux de connaissance. Nos attitudes envers les connaissances mathématiques, nos croyances sur ce à quoi devrait ressembler une preuve mathématique, par exemple, nos schémas inconscients de pensée guident nos choix de sujets de recherche ou d'apprentissage, et les méthodes d'approche et de résolution de problèmes. D'un autre côté, nos actions au niveau technique changent parfois nos croyances, amènent à notre conscience certains schémas de pensée que nous utilisons, et les transforment.

Aussi longtemps que nos croyances seront des croyances aveugles, et nos schémas de pensée inconscients, ils peuvent très bien fonctionner comme obstacles à notre pensée au niveau technique. Un obstacle est surmonté si nous sommes capables de prendre une distance par rapport à notre croyance ou à notre schéma de pensée, si nous voyons leurs conséquences et sommes capables de considérer d'autres points de vue. Une croyance peut alors devenir un engagement épistémologique conscient ; un schéma de pensée, une méthode utile pour résoudre certains problèmes ou une méthode possible pour interpréter une situation.

Si un obstacle n'est pas juste le nôtre ou peut-être celui de deux autres personnes, mais est plus étendu, ou a été étendu une fois ou dans une certaine culture, alors, il est appelé un obstacle épistémologique.

L'impression qui peut rester de notre description peut facilement être que les obstacles épistémologiques sont négatifs dans notre développement conceptuel, qu'ils doivent être évités dans l'enseignement et l'apprentissage. Ce n'est certainement pas ce que j'ai voulu dire. La vraie nature des obstacles épistémologiques est telle qu'ils ne peuvent pas être évités et leur rôle dans notre pensée est important. Ce rôle est à la fois positif et négatif. Il est positif parce que pour comprendre, on doit déjà comprendre, avoir des préconceptions, quelques préjugés. Nous ne pouvons le faire sans nos schémas de pensée, nos croyances et attitudes. C'est le sol sur lequel nous nous tenons. D'un autre côté, si nous voulons comprendre plus, mieux, ou voir des aspects différents des choses que nous considérons, nous devons prendre conscience de ces attitudes et de ces schémas de pensée et agir contre eux. Dans ce sens, le rôle des obstacles épistémologiques est négatif. Ce paradoxe apparent nous rappelle le cercle herméneutique. Il est possible d'échapper au paradoxe si nous abandonnons la métaphore du cercle et si nous amenons en avant l'idée

exemple ?

?

de la spiralité dans la description des processus cognitifs.

1.1.4 Quatre catégories d'actes d'apprentissages.

Quatre catégories d'actes d'apprentissages semblent être considérées comme fondamentales par plusieurs auteurs.
La première est **l'identification** (d'un objet parmi les autres). Le résultat de cet acte est que quelque chose qui était très loin, pour nous, un simple arrière-plan, apparaît soudain comme l'objet principal de l'image, comme dans les expériences gestalistes ; nous le percevons comme quelque chose digne d'intérêt et d'étude. Nous voulons souvent lui donner un nom, ou, s'il a déjà un nom, ce nom gagne soudain dans notre esprit le statut d'un terme scientifique, ce n'est plus un nom commun.
La discrimination (entre deux objets) est une autre catégorie. La discrimination amène à notre conscience l'existence de deux objets distincts ; nous commençons à noter non seulement les différences entre eux mais aussi leurs propriétés pertinentes.
La généralisation mène à une conscience de la possibilité d'étendre la gamme des applications ; certaines hypothèses s'avèrent inintéressantes et de nouvelles possibilités d'interprétation sont découvertes.
La synthèse est la perception de liens entre des faits isolés ; comme résultat, les faits, les propriétés, les relations, les objets sont organisés en entités consistantes. Nous essayerons de réduire un acte quelconque de la compréhension des fonctions à un des actes de ces catégories.

Hoyles et Noss (1986) ont utilisé ces catégories dans leur modèle d'apprentissage des concepts mathématiques. Ce modèle comprend encore une autre activité : celle de **l'utilisation.** L'utilisation est la catégorie des activités d'un enfant où un concept ou des concepts sont utilisés comme un outil pour des objectifs fonctionnels pour atteindre des buts particuliers. L'utilisation n'est pas un acte de compréhension mais c'est certainement une condition nécessaire pour un acte quelconque de compréhension de se produire.

1.1.5 Une méthode pour définir une compréhension d'un concept mathématique

Le concept de fonction peut être défini d'une manière symbolique et formelle, principalement sans utiliser des mots. Le sens logique du concept est confiné à ce que dit sa définition. Il est confiné à la structure de la phrase définissante, à la relation des composantes à d'autres concepts mathématiques et théories. Mais au moment où la notion est appliquée dans un contexte, mathématique ou mathématisé, un langage informel est utilisé et ce langage informel amène des significations qui transcendent la simple logique de la définition. Et j'utilise exprès le mot "significations" au pluriel parce qu'il y a beaucoup de significations différentes de la notion dépendant des contextes. Quand nous pensons aux valeurs de la variable en science ou en économie, nous concevrions plutôt les fonctions comme des relations entre des variables : nous dirions, par exemple, "le chemin couvert par un corps en mouvement est une fonction du temps et de la vitesse", ou que "le prix est une fonction de la quantité de marchandises sur le marché". Nous parlons des lois de la physique ou des lois du marché. Quand, en mathématiques, nous pensons aux courbes représentées dans des systèmes de coordonnées, nous pensons aussi aux relations entre les coordonnées des points qui appartiennent à la courbe. Dans certains intervalles, ces relations remplissent la condition de valeur unique des fonctions. Parfois, la relation est donnée par une équation qui décrit les conditions sous lesquelles un point appartient à la courbe. Si la courbe est déjà là, l'équation dévoile la relation préexistant entre les coordonnées. Ici, l'image que nous avons des fonctions est "statique", dans le sens où nous ne définissons pas ces lois, nous ne pouvons pas les faire ; elles sont plutôt découvertes par nous. La métaphore est différente en géographie ou en géométrie ou en algèbre (ou dans les preuves de Gödel) où nous préférons parler des transformations. Une chose est transformée dans ou sur une autre, elle est transformée en une représentation qui, à ce moment, sert mieux nos objectifs. Par exemple, nous projetons des objets à trois dimensions sur des objets à deux dimensions pour obtenir des représentations sur des feuilles de papier. Ou, nous faisons des abstractions de certaines différences entre les éléments d'une structure algébrique et obtenons une représentation dans une structure quotient (exemple : Homomorphismes de groupe). Nous reflétons les objets dans un ou plusieurs miroirs pour obtenir des modèles harmonieux (symétries). Nous le faisons : nous traitons les objets ou les ensembles d'objets pour obtenir d'autres objets. Cela donne une image plus dynamique d'une fonction. Cette image dynamique est aussi présente quand nous dessinons le graphe d'une fonction : nous traitons les variables indépendantes pour obtenir des variables liées (dépendantes).

Donc, si nous nous posons la question : "Que doit dire la définition du concept de fonction ?", alors une réponse peut être que c'est un triplet ordonné (X, Y, f), où X et Y sont des ensembles et f est un sous-ensemble de $X \times Y$ tel que si (x, y) appartient à f et (x, y') appartient à f alors $y = y'$. C'est tout. Mais si la question est : "De quoi relève la définition ?", alors la réponse est plus compliquée, parce que, ici, nous nous référons à une réalité qui est au-delà de la logique et du formalisme mathématique, nous nous référons à des interprétations et à des applications du concept et cela implique au moins toutes les différentes manières de penser et de parler des fonctions qui sont mentionnées plus haut. Pour nous, la compréhension du concept signifiera être capable de faire face à la fois à ces questions et aux diverses relations entre les réponses à ces questions. Cette attitude envers la compréhension est proche de celle exposée par Steinbring (1989) où la signification d'un concept mathématique est présentée comme une relation entre ses côtés symbole et objet. Le côté "symbole" d'un concept mathématique est lié à la première de nos questions; le côté "objet" à la seconde. Cette approche est concourante avec les herméneutiques philosophiques de Ricoeur : la signification d'une phrase n'est pas confinée à son sens (ce que Ricoeur définit comme ce que la phrase dit exactement) mais comprend aussi sa référence (ce que la phrase est).

Donc, dans notre tentative pour définir les conditions de base de la compréhension des fonctions, nous serons guidés par une exploration de la référence de la définition de cette notion. Nous nous demanderons quelle est la réalité à laquelle cette définition réfère. Quels objets sont là pour être identifiés, différenciés, quels types d'ordres peuvent être trouvés qui amèneraient à l'élargissement de la réalité par des généralisations et des synthèses perspicaces.

L'étude de l'histoire du concept et des difficultés des étudiants servira d'outil et d'inspiration à la recherche. Des exemples de difficultés d'étudiants seront tirés principalement d'un rapport d'une expérience basée sur une série de situations didactiques dans le contexte mathématique des itérations de fonctions et des points fixes attractifs.

1.1.6 Conditions de la compréhension de la notion de fonction

Quelle est donc la référence de la définition de fonction? Sans être capable de nous libérer d'images particulières dès que nous commençons à utiliser l'anglais simple à la place d'un langage symbolique, disons que X et Y réfèrent au monde des changements ou des objets changeants; le symbole f réfère au monde des relations entre les changements ou à des objets changeants ou au monde des processus qui transforment des objets en d'autres objets. Ces relations ou processus doivent être bien définis et cela réfère au monde des règles, des modèles, des lois (bien que ces règles doivent être comprises très généralement).

Premières conditions

La première condition de la compréhension des fonctions est de devenir conscient de l'existence d'un monde supérieur. On doit noter les changements et les relations entre eux comme quelque chose de problématique, qui vaut la peine d'être étudié. Les changements dans le monde environnant ont toujours été source de problèmes et d'anxiété. Cependant, la perception des relations entre eux, des régularités, a été un outil pour faire face aux changements.

En fait, la notion de fonction peut être considérée comme le résultat d'un effort humain pour parvenir à la fin avec des changements observés et expérimentés dans le monde environnant. Et donc, nous parvenons aux premiers et plus fondamentaux actes de compréhension des fonctions :

Acte de compréhension 1 : *Identification des changements observés dans le monde environnant comme un problème pratique à résoudre.*

Acte de compréhension 2 : *Identification des régularités dans les relations entre les changements comme une manière de traiter les changements.*

Si nous ignorons ces actes comme conditions nécessaires pour le développement du concept de fonction en nous-mêmes ou en nos étudiants parce que nous pensons que les mathématiques ne sont pas concernées par les problèmes pratiques alors nous nous comportons comme Platon, qui, dans son "République" déniait le droit à ces problèmes d'occuper les esprits des citoyens libres. Cette attitude est un obstacle; en effet, le premier obstacle apparaît :

Obstacle 1 : *(Une philosophie des mathématiques)*
Les mathématiques ne sont pas concernées par les problèmes pratiques.

Dans la Grèce ancienne, même l'art de construire des tables de certaines relations régulières (en géodésie, astronomie) n'appartenait pas à la science. C'était des connaissances pratiques, formulées nulle part, communiquées par les maîtres aux élèves et d'une génération à une autre, c'était la logistique des Anciens. Et encore, comme le montrent les historiens de l'astronomie et des mathématiques, les méthodes numériques et d'interpolation utilisées dans la construction, par exemple, des tables qui sont dans l'"Almagest" de Ptolémée sont assez sophistiquées : pour la construction de certaines de ces tables, il était nécessaire d'interpoler des fonctions à deux variables. Cependant, ces méthodes ne sont pas explicites, elles sont considérées comme n'appartenant pas aux mathématiques. Les mathématiques, dans le sens de Ptolémée, étaient constituées des "Eléments" d'Euclide plus quelques nouveaux théorèmes géométriques et de la trigonométrie plane et sphérique. Ces sujets étaient inclus par Ptolémée dans les deux premiers livres de l'"Almagest". Dans le troisième, il déclarait qu'ils contenaient toutes les connaissances mathématiques nécessaires pour l'étude de l'astronomie et de la géographie.

Donc, c'est dans le champ méprisé des calculs pratiques que la notion a commencé sa vie. Elle est entrée en mathématiques par la porte de la cuisine bien avant qu'elle ne soit mise sur un piédestal par Félix Klein, qui, en 1908, dans son "programme Meran", a prôné que la pensée fonctionnelle devrait envahir toutes les mathématiques et, à l'école, les étudiants devraient être éduqués avec la pensée fonctionnelle.

Nous avons alors un autre obstacle :

Obstacle 2 : *(Une philosophie des mathématiques)*
Les techniques de calcul utilisées dans la production des tables de relations numériques ne sont pas dignes d'être un objet d'étude en mathématiques.

L'identification des deux premiers actes de compréhension et des obstacles épistémologiques a déjà quelques implications importantes pour la pédagogie des fonctions. Les étudiants doivent devenir intéressés par la variabilité et la recherche de régularités avant que les exemples de fonctions mathématiques élémentaires et les définitions ne soient introduites dans la classe.

Peut-être, dans l'enseignement, les fonctions devraient apparaître comme des modèles de relations. C'est comme ça qu'elles sont venues dans l'histoire. Elles étaient des outils pour la description et la prédiction. Si nous supposons que la signification d'un concept se trouve dans les problèmes et les questions qui lui donnent naissance, et si nous espérons que nos étudiants saisissent la signification de la notion de fonction, alors cela semble être une revendication assez raisonnable à faire. Cela apparaît dans certains livres. Mais plus souvent alors, l'ordre n'est pas inversé : les relations entre les variables sont présentées comme de simples illustrations des fonctions mathématiques et les premières sont ainsi préparées, ainsi idéalisées qu'elles sont presque identiques avec les fonctions qui prétendent être leur modèle. Et même si les fonctions apparaissent comme modèles de certaines relations découvertes par expérience, ces dernières sont idéalisées au point de déformer complètement leur image dans les esprits des étudiants. Non seulement les ensembles discrets de données sont joints par des lignes continues mais ces points semblent toujours tomber sur la ligne. La simplification mène à des absurdités telles que la représentation de la croissance d'une population de bactéries dans une culture par la fonction $f(n) = 2^n$. Ce type de pédagogie peut rendre difficile pour les étudiants de distinguer les relations découvertes par l'expérience de leurs modèles mathématiques.

En Pologne, la philosophie derrière le curriculum des écoles secondaires (lycées généraux) est très liée aux obstacles 1 et 2. Les mathématiques pures, les sciences pures, les connaissances encyclopédiques et la terminologie abondante en biologie, chimie et géographie est ce qui marque l'enseignement dans ces écoles. Les tables logarithmiques et du sinus ne sont plus si nécessaires. Les étudiants doivent durement tout calculer. Le "focus" est sur l'algèbre, la logique, l'analyse mathématique, et la géométrie analytique. D'un autre côté, dans les écoles professionnelles, comme les lycées économiques, les étudiants font beaucoup de calculs mais ne doivent jamais réfléchir au "pourquoi fonctionnent" les algorithmes qu'ils utilisent. On peut dire que, dans ces écoles, les étudiants sont entraînés pour la logistique. Et la société jette un regard juste méprisant comme Platon sur les étudiants des écoles professionnelles.

X et Y , ou l'identification de ce qui change.

Très souvent, dans l'observation des changements, les étudiants ont des difficultés à identifier ce qui change ou quels sont les objets changeants qu'ils traitent. Ils n'analysent pas la situation, ils la prennent comme une entièreté, comme un phénomène comme la pluie ou la neige. Par exemple, Goldenberg, rapporte comment un étudiant verbalise la relation entre deux variables : "Quand vous introduisez un nombre positif comme un, il va six fois de cette façon, -2 ; mais si vous le bougez de cette façon, il ira dans la direction opposée". Le "il", est le sujet impersonnel et non identifié comme, "il pleut" ou "il neige". Beaucoup de difficultés d'étudiants quand ils résolvent le problème de l'échelle semblent aussi avoir leurs sources dans la non-identification des variables pertinentes.

Il y aura d'autres exemples de ce phénomène dans l'expérience décrite ici. Les étudiants avaient des difficultés à identifier le procédé d'itération de la fonction dans son graphique et la représentation dynamique.

En observant le déplacement d'un point $(x, f(x))$ le long du graphe, les étudiants se concentrent sur le déplacement lui-même, sur le changement, sans réfléchir à ce qui était déplacé ou subissait le changement. Ils étaient intéressés par la forme de la trajectoire du déplacement (spirale ou en escalier). Au début, ils décrivaient ce qu'ils voyaient en disant : "cela fait comme ça", "il se ferme sur lui-même", un geste ou un dessin accompagnant.

Plus tard, quelques étudiants ont dit que c'est le graphe qui se déplace lui-même et d'autres que c'est le point initial $((x_0, 0)$ ou $(x-0, f(x_0))$. Seulement bien après dans l'expérience, quelques étudiants ont identifié le terme d'une suite comme un objet dont les changements sont pris sous un examen minutieux. Cette suite, n'était en général pas, la suite des arguments x_n telle que le terme suivant est l'image, par la fonction, du précédent. Pour certains étudiants, c'était parfois une suite de points du graphe, nommée : $(x_n, f(x_n))$. Parfois, c'était une suite de nombres qui pouvaient être à la fois les valeurs de la fonction ou les distances à partir du point fixé. Les expressions données étaient comprises de manières très diverses.

Par exemple, Ag (17 ans) a dit : "une fonction a un point fixé attractif si les valeurs de la fonction viennent de plus en plus près du point d'intersection". Elle pensait aux termes d'une suite de nombres obtenus par une règle itérative. Pendant la résolution du problème : quelles fonctions linéaires ont des points fixes ? Elle répond :
Ag : "Ecoutez ! Prenez $q = -1/2$, alors vous avez -1/2 et alors vous multipliez par -1/2. Et vous obtenez -1/4. De cette façon vous serez de plus en plus près ..."
Ew : "Très bien. Mais nous devons le définir par la formule d'une fonction".
Ag : Mais les suites sont des fonctions ! Vous ne vous rappelez pas la définition".
Elle pense qu'elle a résolu le problème en trouvant une suite obtenue par une règle itérative. Cette règle détermine une transformation d'un terme dans un autre et cette transformation est une fonction pour elle. Cette transformation pourrait être donnée par la fonction continue $y = -1/2f(x)$ et Ew arrive à cette solution à la fin. Mais la forme dans laquelle les filles mettent leur solution est un compromis entre les conceptions de Ag et de Ew : $a_n = (-1/2)x$.

Au début de l'expérience, pour Ag, une fonction était en effet un déplacement de points sur un plan ou une ligne. Les prototypes dans sa conception étaient, premièrement, la symétrie axiale, et plus tard l'homothétie. Quand elle doit trouver une fonction qui assigne 3 à 2 et 2 à 3, son attention est captivée par le fait que les valeurs "sautent" entre 2 et 3. Elle associe cela avec la symétrie axiale, en premier : "C'est une réflexion par la symétrie axiale", dit-elle. Et même : "si ici c'est le point 2, alors, ici, j'aurai le point 2 prime". Elle n'a pas pensé que 2 et 3 étaient des nombres et pas des points du plan. Elle ne pense plus au domaine de la fonction qu'elle doit considérer, c-à-d, ce qui est changé ou transformé. Tout ce qui l'intéresse c'est comment cela a changé. Elle fait des dessins.

Ag : "Parce que vous connaissez x, n'est-ce pas ? Ainsi, vous connaissez x' (elle pense à la symétrie axiale). Et alors, vous ajoutez $x/2$. Et alors vous transformez encore."

La symétrie axiale, d'une certaine manière, envoie 2 sur 2 prime et pour avoir 3 nous devons ajouter un demi de deux.

Ag : "OK. Et encore, ce que je veux savoir c'est comment vous transformerez ce 2 en 3. Déterminons quelques rapports de telle façon que sur cet axe 2 aille sur 3. Ces points ne signifient rien (peut-être veut-elle dire qu'on peut prendre x à la place de 2 et x' à la place de 3 ?). Vous devez seulement avoir le rapport d'une homothétie".

Quand on résout le problème : quelles fonctions linéaires ont des points attractifs fixés ? Ew, une partenaire de Ag dans l'expérience, a semblé comprendre "valeurs de la fonction" comme une suite de valeurs d'une expression algébrique (ex. $1/x$) pour une suite spécifique d'arguments (1, 2, 3, ..., ou -1, -2, -3,...). Dans une session suivante quand les filles devaient préparer un message écrit à un collègue en expliquant ce que ça signifie qu'une fonction ait un point attractif fixé, Ew pensait plutôt à des points d'un graphe d'une fonction comme étant les "valeurs de la fonction" (ces valeurs étaient supposées "devenir de plus en plus proches du point d'intersection du graphe de la fonction avec la ligne $y = x$").

Pour Dk (16 ans), plus tard dans l'expérience, les valeurs de la fonction signifiaient des nombres décrits d'une manière très constructive. Quand il a expliqué à une compagne de classe ce qu'elle devait faire pour obtenir la suite d'itérations d'une fonction, il a évité de dire "valeurs de la fonction". Cependant, il dit : "Supposons que la formule d'une fonction soit donnée. Vous choisissez un nombre. Vous mettez ce nombre dans la formule et vous calculez". Cela décrit x_0 et $f(x_0)$. Pour décrire $ff(x_0)$, il dit : "Et alors vous exécutez la même fonction pour le même temps, c'est-à-dire, vous exécutez la même opération qui est déterminée par cette fonction".

Nous avons identifié un nouvel acte de compréhension :

Acte de compréhension 3 : *Identification des sujets de changements dans l'étude des changements.*

Un autre obstacle :

Obstacle 3 : *(Schéma de pensée inconscient)*
Considérer les changements comme un phénomène, se concentrant sur comment les choses changent, en ignorant ce qui change.

Cet obstacle peut être considéré comme un obstacle épistémologique : il semble être commun dans la description des changements et des relations au temps d'Aristote. Dans certains de ces travaux, l'attention est centrée sur comment les choses passent d'un état à un autre, et sur le fait de trouver une définition du changement et des catégories de changements. Dans " PHYSICS ", Aristote définit "le mouvement de changement" comme une actualisation d'un être potentiel, et dit que : "il y a autant de types de mouvement de changement qu'il y a d'êtres différents". Ces exemples de "mouvement de changement" sont : les changements qualitatifs, l'augmentation et la diminution, l'apparition et la disparition, le déplacement, le procédé de construction, l'apprentissage, le traitement d'une maladie, la maturation et le vieillissement. Ces noms décrivent la nature du changement comme une variable qui passe d'une valeur possible à une autre. Mais Aristote n'est pas intéressé par les variables elles-mêmes. Il ne regarde pas les méthodes et les significations pour mesurer leurs changements.

Les quantités connues et inconnues versus variables et constantes

Avant qu'ils ne commencent à apprendre les fonctions, toute l'expérience que les étudiants ont avec les variables est celle pour laquelle est faite la distinction fondamentale entre les quantités connues et inconnues. Quand on arrive aux fonctions, ils doivent faire un changement vers la distinction entre les constantes et quantités variables. Voici un exemple de problème donné à un test dans un collège français de Montréal à une classe d'élèves de 16 ans : "Deux compagnies louent des photocopieuses. La première prend 300 dollars pour la location de la machine par mois et 0.04 dollar pour chaque copie. La deuxième prend 250 dollars pour la location et 0.06 dollar par copie. Pour quel nombre de photocopies par mois le prix sera-t-il le même ? Si vous êtes un grand utilisateur de photocopieuses, quelle compagnie est préférable ?" Pour répondre à la première question, il est suffisant de penser en termes d'équations et d'inconnues pouvant en être extraites. Mais la seconde question exige que le nombre de copies soit considéré comme une variable de laquelle dépend d'une autre variable, le prix. Très peu d'étudiants ont répondu à la seconde question ou y ont répondu correctement. Le test portait sur les systèmes d'équations à deux inconnues, et le besoin de penser en termes de variables était quasi inattendu. Et la contradiction entre ces deux modes de pensée était trop grande. Quelques étudiants ont résolu la première question en écrivant une seule équation à une inconnue : $300+0.04x = 250+0.06x$. La solution ne fut pas complètement acceptée par le professeur : elle avait demandé d'écrire un système d'équations ! Mais dans ce cas, le système d'équations appartiendrait à cet autre mode de pensée : en termes des fonctions ou des relations. Si y est le prix qui doit être payé pour l'utilisation de la machine alors, pour la première compagnie $y = 300+0.04x$, et pour la seconde $y = 250+0.06x$. Cela peut être considéré comme un système d'équations à deux inconnues avec un petit peu de bonne volonté, mais leur forme suggère plutôt qu'elles soient interprétées comme des relations entre le prix et le nombre de copies, et qu'elles soient étudiées comme telles. L'étude des relations et des relations entre elles est facile si elles sont visualisées comme des lignes droites dans un système de deux coordonnées. Les lignes droites se croisent pour $x = 2500$ et il est clair que pour $x < 2500$, la seconde compagnie est préférable et pour $x > 2500$ la première est préférable.

La différence entre ces deux modes de pensée est si importante qu'au

18ème siècle, elle était considérée comme une ligne de démarcation entre deux domaines distincts des mathématiques. A partir d'au moins Euler, les présentations de l'Analyse commençaient avec une distinction tranchée entre les quantités "variable" et "constante", et entre cet aspect des grandeurs et celui coutumier en Algèbre (Analyse ordinaire) où la discrimination principale était entre les quantités connues et inconnues :
"Une quantité constante est une quantité déterminée qui conserve toujours la même valeur .... A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'alphabet, et celles qui ne le sont pas, par les dernières ; mais, c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie ; on y envisage les quantités sous un autre aspect, les unes étant considérées comme constantes, les autres comme variables" (Introduction à l'Analyse infinitésimale par Euler).

Ce texte est un indice d'un acte de compréhension dans la communauté mathématique, où un certain mode de pensée est identifié comme une nouvelle méthode mathématique, distincte d'un vieux schéma de pensée. Ce dernier n'est, cependant, pas rejeté comme inutile mais plutôt, il est identifié comme appartenant à une science différente. Une distinction est donc faite entre deux domaines de la pensée mathématique.

Même si quelques objets sont communs à ces domaines, l'attention se centre sur différents aspects de ceux-ci et leur assigne des rôles différents. Par exemple, l'équation n'est plus une condition sur l'inconnue qui permet d'extraire sa valeur. Dans le contexte des fonctions, elle apparaît comme le principe ou la loi selon laquelle quelques variables changent quand d'autres variables changent. D'où, l'acte suivant de compréhension :

Acte de compréhension 4 : *La distinction entre deux modes de la pensée mathématique : une en termes de quantités connues et inconnues et l'autre en termes de quantités variables et constantes.*

Obstacle 4 : *(Schéma de pensée inconscient)*
Penser en termes d'équations et d'inconnues.

Asymétrie de X et Y : les variables dépendantes et indépendantes

Les rôles de X et de Y ne sont pas symétriques dans la définition de fonction. La condition ne semble pas nous poser de difficultés à l'heure actuelle, mais cela a pris longtemps dans l'histoire de le percevoir comme une chose importante pour distinguer l'ordre des variables. C'est assez compréhensible, si nous gardons à l'esprit que la notion de fonction est née dans le contexte de la géométrie analytique où les relations entre les différents segments jouant un rôle pour la courbe (diamètre, axe) étaient considérés. Après tout, si nous analysons l'ellipse en utilisant l'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, l'ordre des variables n'a pas d'importance.

Les historiens attribuent la distinction entre les variables dépendantes et indépendantes à Descartes mais il semble que les rôles des coordonnées dans sa "Géométrie" étaient assez symétriques. Cette distinction n'est même pas claire chez Newton, car dans ses travaux, les variables semblent varier avec le temps, bien que ici le temps soit considéré comme une notion purement conventionnelle :
"Dans ce qui suit, je ne regarderai pas le temps, considéré formellement, mais à partir de quantités posées qui sont du même type, je supposerai que certaines augmentent avec un flot constant : les autres peuvent être rattachées à celles-là et ainsi par analogie le nom de "temps" ne peut peut-être pas leur être donné".

La non-considération de l'asymétrie des variables a été observée clairement chez un étudiant qui a participé à l'expérience décrite par Sierpinska (1989). La raison de cela était beaucoup plus une raison historique. Il traitait les fonctions dans le cadre de la géométrie analytique ; pour lui, les courbes n'étaient pas les représentations de certaines relations entre les variables. Plutôt, les courbes étaient d'abord là et les relations représentaient les courbes, elles les décrivaient. La formule de la fonction permettait juste de calculer une coordonnée quand l'autre était donnée. Le fait que c'était toujours la seconde coordonnée qui était uniquement déterminée par la première et pas toujours vice et versa, n'était pas perçu par l'étudiant.

Acte de compréhension 5 : *La distinction entre les variables dépendantes et indépendantes.*

Obstacle 5 : *(Schéma de pensée inconscient)*
Considérer l'ordre des variables comme sans intérêt.

X et Y - grandeurs ou ensembles de nombres ?

Les mots attribués à Galilée : "Mesure ce qui est mesurable et rend mesurable ce qui ne l'est pas", décrivent très bien la philosophie suivie par les mathématiciens à la Renaissance. C'était un pas vers la modélisation des phénomènes physiques avec l'aide des relations entre les ensembles de nombres. Pour atteindre ce but, cependant, une extension et une uniformisation du concept de nombre était absolument nécessaire. La division grecque entre les nombres et les grandeurs continues, pouvait gêner cette tentative. Tous les rapports ou les relations entre les variables ne peuvent pas être exprimés par des rapports de nombres entiers, et la représentation des relations par des rapports entre des segments, des surfaces ou volumes ne pouvaient pas satisfaire un besoin de mesurer. La restriction des rapports à des rapports de grandeurs homogènes, la représentation des nombres par des segments, des produits par des rectangles ou des solides réduits au rang de formules sensibles : le rapport de la trajectoire au temps était sans sens, comme additionner un segment à un rectangle. Les proportions étaient considérées comme différentes des égalités, le rapport comme différent du quotient. C'était une charge très lourde qui serait gâchée si le monde complexe devait être décrit mathématiquement.

Obstacle 6 : *(Une attitude envers le concept de nombre)*
Une conception hétérogène du nombre.

Cet obstacle a eu une très longue vie dans l'histoire. Quand Nicole Oresme a essayé de faire vivre la croyance, commune au 13ème et 14ème siècle en Europe, selon laquelle les mathématiques ont la puissance d'expliquer les phénomènes de la nature, c'est à la géométrie d'Euclide qu'il a d'abord pensé. Sur le "Traité de la configuration des qualités", il dit :
"Toute chose excepté les nombres est conçue à la manière d'une quantité continue. D'où, il est nécessaire d'imaginer des points, des lignes et des surfaces ou leurs propriétés dans lesquelles, comme Aristote l'espère, la mesure ou la proportion est trouvée de manière originale. D'où chaque intention qui peut être acquise successivement doit être imaginée au moyen d'une ligne droite érigée perpendiculairement sur un point ou des points de l'espace ou un sujet d'une chose profonde".

Galilée se débrouille pour prouver certaines propriétés du mouvement en construisant un modèle géométrique. Il introduit la notion d'accélération comme intensité de la vitesse. En étudiant le déplacement dans le cas d'une accélération uniforme, il montre qu'un tel mouvement est équivalent à un mouvement à vitesse uniforme égale à la moyenne arithmétique des vitesses initiale et finale. La preuve consiste à montrer l'égalité des aires de certaines figures rectilignes. Un rectangle correspond à une vitesse uniforme, un triangle ou un trapèze à une accélération uniforme.

Dans un autre ouvrage, Oresme montre que dans un mouvement uniformément accéléré avec un vitesse initiale égale à 0, la trajectoire couverte augmente proportionnellement au carré du temps. La manière de penser géométriquement aux nombres fait que les graphes d'Oresme sont davantage des représentations géométriques qualitatives ou des modèles de relations entre les variables que des graphes dans le sens quantitatif que nous comprenons aujourd'hui.

Dans la "Géométrie" de Descartes, les coordonnées sont des segments et non des points. Ce sont des segments remplissant une certaine fonction pour la courbe et non des variables qui peuvent supposer arbitrairement des valeurs réelles. (C'est la métaphore de Leibniz qui a donné naissance au terme de fonction et à sa définition).

Deux facteurs ont contribué dans l'histoire à une unification de la notion de nombre. L'un d'eux est la réalisation de Simon Stevin dans le domaine de la notation décimale. Dans son "Arithmétique", Stevin a défini le nombre comme : "ce qui exprime la quantité d'une chose", et a demandé que soit abandonnée la tradition d'exclure les nombres irrationnels du domaine des "vrais nombres". Il considérait que le nombre est une quantité continue, et que, en particulier une unité est divisible : "il n'y a pas de nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, non exprimables". Le livre de Stévin a eu une grande popularité en Europe et ses points de vue étaient partagés et développés par d'autres philosophes.

La disjonction du nombre de ses interprétations géométriques est apparue explicitement dans l'"Arithmétique universelle de Newton" :
"Par nombre, nous comprenons un rapport abstrait d'une quantité à une autre du même type, admise comme unité. Les nombres apparaissent sous trois formes : entiers, fractionnaires ou irrationnels. Un nombre est entier s'il mesure des unités ; les nombres fractionnaires mesurent des parties entières de l'unité ; le nombre irrationnel est incommensurable avec l'unité".

En 1693, Leibniz a exprimé son point de vue :
"J'ai toujours désapprouvé le fait que des signes spéciaux étaient utilisés par le rapport et la proportion, sur base de ce que pour le rapport, le signe de division suffit et pour la proportion, le signe d'égalité suffit".

L'autre facteur était le développement dans le domaine de l'algèbre et de la notation symbolique. Les lettres utilisées en algèbre ont rendu les notions de nombre et de grandeur plus abstraites. Grâce à cette abstraction, il était de moins en moins justifié de faire une distinction entre les nombres discrets et les grandeurs continues. Même si, au début de la résolution d'un problème, quelques lettres représentent des quantités ou des variables, et d'autres nombres plus simples, cette distinction disparaît quand l'équation dans laquelle elles apparaissent est finalement manipulée algébriquement. Leur statut est celui de variables, et comme l'équation traduit une relation quantitative, le domaine de chacune de ces variables commence à être conçu comme un domaine numérique.

Avec le respect de l'arbitraire complet de la loi de fonction dans sa définition, une telle attitude peut être considérée comme un obstacle.

Obstacle 9 : *(Schéma de pensée inconscient)*
La proportion est un type privilégié de relation.

La proportion est encore au centre des intérêts d'Oresme dans son "Traité sur la configuration des qualités", mais d'autre part, lui et d'autres mathématiciens ont commencé à dépasser cet obstacle. La contribution qui a le plus influencé ce domaine est attribuée à Thomas Bradwardine, qui, dans son "Traité sur les proportions" revoit en détails les points de vue d'Aristote sur la nature des forces provoquant le mouvement.

L'idée de base qui se retrouve à travers toutes les déclarations d'Aristote sur le mouvement est que la vitesse est proportionnelle à la force motrice et inversement proportionnelle à la résistance : $v \sim F/R$ où v est la vitesse $v \sim s/t$, F est la force motrice et R est la résistance. Deux difficultés critiques étaient implicites à cette théorie. Premièrement si $F = R$, alors l'expérience suggère qu'il n'y a pas de mouvement mais selon la théorie un mouvement doit se produire. Deuxièmement si $R = 0$, c-à-d que le mouvement se fait dans le vide, alors la vitesse devient apparemment infinie. Aristote n'ignorait pas ces difficultés et les a traitées en spécifiant que $v = 0$ si $F = R$ et en niant la possibilité de l'existence d'un vide. Bradwardine a déclaré que ce que Aristote avait en tête c'était l'idée que la vitesse augmente de manière arithmétique quand le rapport F/R augmente géométriquement. Donc, si u_0 est la vitesse correspondant à un rapport particulier r entre la force et la résistance, alors un rapport de r^2 sera nécessaire pour produire une vitesse de $2u_0$ et des rapports de r^3, r^4, r^5 pour produire des vitesses de $3u_0$, $4u_0$, $5u_0$ respectivement.

Ce point de vue est considéré comme une découverte des fonctions variant exponentiellement. En fait, ce que nous avons ci-dessus c'est une fonction telle que $f(x^n) = nf(x)$ $(f(r^n) = nu_0 = nf(r))$. Cette condition est satisfaite par les fonctions logarithmiques.

Dans son ouvrage "Algorismus proportionum", Oresme a exploré les règles pour manipuler les fonctions exponentiellement. Et bien qu'il n'avait pas de manière satisfaisante d'écrire les puissances, il montre par les exemples qu'il donne, qu'il comprend complètement les règles pour manier les exposants fractionnaires et entiers.

Le dernier obstacle (celui de la proportion privilégiée) en est un en ce qui concerne le concept de fonction. Mais, comme avec tous les obstacles épistémologiques, il a un rôle positif dans notre pensée, et il est possible que le rôle de cet obstacle soit plus important que celui de n'importe quel autre. Le physicien et philosophe David Bohm amène la perception des relations proportionnelles comme l'essence elle-même de n'importe quelle pensée rationnelle : la proportion est une égalité de deux rapports; "rapport" et "raison" ont la même racine en latin.

Ce que nous appréhendons est appréhendé sous forme de rapport. Par exemple, reconnaître n'importe quoi, c'est voir que, comme les rapports qui varient sont reliés à l'objet, ainsi ils sont reliés au concept mental que nous en avons. C'est aussi ce qui est fait en mathématiques et dans ses applications.

Les quatre catégories d'actes de compréhension sont impliquées dans la perception du rapport : un peu de considération montre qu'un type de rapport est en effet une caractéristique clé de la raison. La forme générale du rapport peut être écrite par $A : B$ comme $D : C$, avec le rapport numérique $A/B = D/C$ étant la forme spéciale de cela. Un tel rapport signifie que A est relatif à B comme D est relatif à C. Cependant, deux choses peuvent être reliées seulement si elles sont différentes. Mais en latin, la signification de la racine de "différence" est "portée à part". "Relier" vient du participe passé de "référer" qui signifie "porter en dehors". Dans ce processus, deux choses sont, au moins dans le cerveau, portées à part de la différence et alors ramenées à la similarité et à la relation.

Cela signifie que dans la perception d'une proportion entre deux rapports, d'abord une distinction doit être faite entre deux rapports $A : B$ et $D : C$. Et alors $A : B$ doit être perçu comme similaire à $D : C$ d'un certain point de vue, ils doivent être généralisés, dépouillés de leurs caractéristiques essentielles (c'est-à-dire certaines différences doivent être oubliées). Et alors la similarité ou l'égalité doit être enfoncée dans un système d'idées plus large où la relation entre eux peut faire sens. C'est la synthèse. Mais, tout cela ne serait pas possible sans l'identification de la possibilité d'un lien entre quatre identités particulières ou deux relations.

Pour Bohm, la "rationalité" elle-même signifie la perception de rapports et le développement d'une hiérarchie de rapports cohérents : "Comme un rapport peut être représenté par le symbole R, il est possible de relier les rapports d'une manière similaire : $R1 : R2$ comme $R2 : R3$ et ainsi de suite. D'où, d'un simple rapport, une relation ou des relations peuvent être définies. Le développement d'une telle hiérarchie de rapports ou de relations, qui se produit dans tous les domaines dans lesquels l'esprit intervient, dépend essentiellement de la puissance de la pensée rationnelle ou de la raison. L'irrationalité peut être considérée comme un échec que de tels rapports puissent coexister. La rationalité est donc un ordre, en effet est l'ordre essentiel de pensée". Le rapport ou la raison est l'essence de la structure mathématique, dit Bohm, mais il peut être trouvé dans tous les domaines de la vie : dans la nature, la maison, le cristal, le corps humain, la peinture, l'utilisation du langage.

L' enchantement avec l'algèbre : l'expression analytique comme fonction.

Il est évident qu'une certaine conscience des méthodes algébriques et de l'algèbre comme un outil méthodologique en mathématiques est nécessaire pour l'étude des fonctions. Le manque de cette conscience rend difficile pour l'étudiant la saisie de la signification de telles inscriptions comme $y = f(x)$, $f(x) = f(-x)$, $y = f(x+t)$, $y = mx+n$ ...ou même de formules spécifiques simples telles que $y = sinx$ ou $y = 2x - 1$.

Quand, dans mon pays, le concept général de fonction est introduit vers 13 ans, les étudiants devraient avoir fait de l'algèbre depuis un an et demi. "Faire de l'algèbre" à ce niveau signifie qu'ils devraient utiliser des lettres pour les quantités inconnues, transformer des expressions algébriques avec l'aide d'identités concernant le carré de la somme et de la différence, et la différence de carrés, et résoudre de simples équations linéaires. C'est une expérience trop limitée pour saisir la signification d'inscriptions telles que $y = ax$ où x et y ne doivent pas être considérés comme des inconnues mais comme des variables, et leur rôle doit être différencié de celui de a qui est un paramètre. Même s'il est vrai qu'à 13 ans, la plupart des enfants ont atteint le stade des opérations formelles, cela ne signifie pas qu'ils sont capables de comprendre une grande partie du formalisme algébrique à cet âge.

Le manque de conscience algébrique rend la compréhension des fonctions très difficile si pas impossible. D'un autre côté, l'habileté algébrique accompagnée de la croyance en la puissance de l'algèbre pour résoudre presque automatiquement beaucoup de problèmes, peut être un obstacle à la compréhension du concept général de fonction. L'histoire a connu ce genre de phénomène. Aux 17 et 18ème siècles, même si, au début de la résolution d'un problème, les proportions et les égalités étaient utilisées pour représenter une relation fonctionnelle, en cours de solution, elles perdraient graduellement cette signification et deviendraient de simples expressions algébriques sur lesquelles étaient exécutées des opérations formelles. Chez Newton, au moins dans son premier ouvrage, l'opération dérivée était une opération formelle sur les monômes : si $a = x^m$, alors $\dot{a} = mx^m$. Et il n'y a pas d'erreur car, pour Newton, $\dot{a} = a'x$. Et les premières définitions du concept de fonction la présentait, en fait, comme une expression algébrique :
"Une fonction d'une quantité variable est une quantité composée de n'importe quelle manière de cette variable et de quantités constantes".(Bernouilli)

"Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée de n'importe quelle manière de cette même quantité et de nombres ou de constantes. Donc, une expression analytique qui, en plus de la variable z, contient des constantes est une fonction de z. Exemple : $a + 3z$, $az - 4zz$, $az + b/(aa - zz)$ sont des fonctions de z".(Euler)

On peut se demander si Euler considérerait une expression comme $z + zz$ comme une fonction de z. Cela ne contient pas une constante. Bien sûr, c'est ainsi seulement si on ne compte pas l'invisible "1".

Lagrange : "On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées".
Lagrange a laissé tomber la condition sur les constantes dans sa définition.

Cauchy : "On nomme fonction d'une ou plusieurs quantités variables des quantités qui se présentent, dans le calcul, comme résultats d'opérations faites sur une ou plusieurs autres quantités constantes ou variables".

De Lagrange à Cauchy, il y a une petite différence de langage et de "focus". Lagrange parle encore de l'expression comme étant la fonction. Pour Cauchy, c'est le résultat d'opérations qui sont impliquées dans l'expression. Lagrange parle de la loi de la fonction ; Cauchy de la valeur. Maintenant, nous concevons la fonction comme étant ni la loi ni la valeur ; c'est la synthèse de ces deux choses et des concepts de domaine et co-domaine.

Nous avons rencontré deux obstacles reliés au rôle de l'algèbre en mathématiques :

Obstacle 10 : *(Croyance concernant les méthodes mathématiques)*
La croyance forte dans le pouvoir des opérations formelles sur les expressions algébriques.

Obstacle 11 : *(Une conception de la fonction)*
Seules les relations descriptibles par des formules analytiques sont dignes de recevoir le nom de fonctions.

Les mathématiciens ont toujours pensé aux moyens de décrire ces relations, et au 17ème et 18ème siècles, ils ont accumulé une large expérience et une foule de résultats. Mais, ceux qui en valaient le plus la peine étaient ceux obtenus dans le domaine des expressions analytiques des relations. Et donc, les outils analytiques pour décrire des relations sont devenus plus importants que les relations elles-mêmes. Cela suggère un acte de compréhension qui correspond à la fois à l'obstacle de l'enchantement par l'algèbre et celui de l'enchantement par la proportionnalité :

Acte 9 : *La distinction entre une fonction et les outils analytiques parfois utilisés pour décrire sa loi.*

La distinction ci-dessus peut être lancée chez les étudiants en leur faisant prendre connaissance des exemples où une simple fonction peut être décrite par deux formules différentes (une récursive et une directe comme la formule de Binet pour la suite de Fibonacci).

Mais, il peut être intéressant que l'acte ci-dessus n'ait pas lieu avant que le concept général de fonction ne soit synthétisé par une personne. Le concept général permet pour une telle variété de possibilités que très peu de fonctions puissent être décrites par des formules. Cependant, la synthèse du concept général de fonction est très difficile à réaliser par les étudiants. Ce problème est traité dans la section suivante.

La synthèse du concept général de fonction

Pourquoi cette synthèse est-elle difficile ? Le besoin d'étendre la notion de fonction au delà des fonctions exprimables analytiquement, n'est pas apparu dans l'histoire avant le moment de formuler des théorèmes généraux sur des classes larges de relations entre les variables, et d'organiser les résultats obtenus pour les fonctions particulières. Le processus a démarré dans l'histoire avec la fameuse polémique entre Euler, D'Alembert et Bernoulli concernant le problème de la corde vibrante, et a continué avec le développement de la théorie des séries trigonométriques de Fourier, la notion de fonction continue de Cauchy, Dirichlet, Abel, Bolzano, Weierstrass et autres. C'est exactement l'étude des séries de Fourier et la recherche des conditions sous lesquelles les séries convergent qui ont amené Dirichlet à formuler sa définition générale de fonction en 1837 : "si une variable y est reliée à une variable x de telle sorte que quand une valeur numérique est assignée à x, il y a une règle selon laquelle une valeur unique de y est déterminée, alors y est appelé une fonction de la variable indépendante x".

Quand nous regardons le contexte dans lequel la notion générale de fonction est née, la raison de la difficulté de réaliser la synthèse de la notion générale de fonction à des étapes anticipées de l'expérience mathématique devient claire. Pour voir la raison d'une telle notion générale, ne doit-on pas avoir vu les utilisations de ses exemples particuliers ; le besoin doit être ressenti pour les déclarations sur les classes ou les espaces de fonctions. La conceptualisation de fonction doit avoir lieu au-delà du stade du "processus", pour utiliser le terme de Dubinsky et le concept doit devenir un objet que l'esprit peut manipuler comme un élément.

La définition de Dirichlet contient des fonctions très étranges, certaines ne peuvent pas être représentées par une courbe dessinée à main levée (la fonction de Dirichlet par exemple) ; certaines sont continues et pourtant nulle part différentiables. Ces exemples sont des conséquences logiques de la définition prise littéralement. Pour être prêt à accepter ces exemples comme des exemples de fonctions, on doit être suffisamment mature dans la culture mathématique pour voir le rôle des définitions en mathématiques comme établissant des liens de façon logique et non comme des descriptions de certains aspects d'un objet autrement connu par les sens et la perspicacité. Comme, normalement, les premières fonctions rencontrées par un étudiant sont partout continues, non différentiables en au plus un nombre fini de points, construites avec une courbe d'une pièce dans la représentation graphique, données par une formule simple ; de telles fonctions rares constituent, dans l'esprit des étudiants, le prototype d'une fonction ; c'est l'objet dont la définition est supposée donner un fidèle compte-rendu. Si les conséquences logiques de la définition montrent des exemples d'objets qui ne sont pas comme le prototype, alors ce n'est pas le prototype qui doit changer mais la définition. De cette attitude à celle qui accepte la définition générale de fonction avec toutes ses conséquences (au moins pour un moment), un grand pas doit être franchi ; un objectif doit être vu pour l'introduction d'une telle chose. Pour voir cet objectif, on doit aller au-delà de l'étude des fonctions élémentaires.

Obstacle 12 : *(Une conception de la définition)*
La définition est une description d'un objet connu autrement que par les sens et la perception. La définition ne doit pas déterminer l'objet, plutôt l'objet détermine la définition. Une définition n'établit pas de lien logique.

Acte de compréhension 10 : *La distinction entre les définitions mathématiques et les descriptions des objets.*

Acte de compréhension 11 : *La synthèse de la conception générale de fonction comme un objet.*

La croyance que toutes les fonctions sont continues et différentiables presque partout est souvent mentionnée comme une idée fausse ou même comme un obstacle épistémologique. Etant donné la difficulté fondamentale de synthétiser la conception générale de fonction et l'obstacle relié à la notion de définition en mathématiques, cette croyance n'est pas seulement ce qui peut être attendu des étudiants éduqués sur les fonctions linéaires, quadratiques et trigonométriques. Nous ne pensons pas que cela en vaut la peine de formuler ces croyances comme des obstacles spéciaux. Premièrement, parce qu'ils suivent ceux déjà formulés. Et deuxièmement, parce que les croyances spécifiques et les prototypes sont liés au type d'exemples introductifs auxquels un étudiant est soumis, et cela peut être différent d'une classe à l'autre. N'importe quel choix de propriétés qui sont attribuées communément aux fonctions pourrait ne pas être exhaustif.

La conclusion pédagogique de cette remarque est qu'une introduction de la définition générale de fonction trop tôt ne fait pas sens ; elle peut être soit ignorée soit mal comprise.

Les questions épistémologiques liées à la définition de fonction de Peano : Les fonctions sont-elles uniquement certains types de relations ?

La définition de Dirichlet a été largement acceptée et utilisée jusqu'au milieu du 20ème siècle et même plus tard, au moins par les auteurs de livres. Cependant, elle a commencé à provoquer des discussions dans les cercles fondationnistes à la fin de ce siècle. A la fois les constructivistes et les intuitionistes aussi bien que les formalistes étaient contre cette définition bien que ce soit pour des raisons très différentes. Les premiers voulaient avoir une règle permettant de trouver un y correspondant à un x donné en temps fini ou un nombre fini d'étapes. Pour les seconds, la définition n'était pas suffisamment rigoureuse. Voici ce qu'a dit, en 1973, Mostowski au sujet de ces problèmes durant une de ses conférences sur l'histoire des mathématiques à l'université de Varsovie :
"La définition de Dirichlet est, bien sûr sans aucun sens. Mais, aussi tard qu'en 1911, dans sa conférence à Lvov, Sierpenski dirait que la fonction est une correspondance sur base de laquelle, étant donné un objet x, l'objet $f(x)$ apparaît dans notre esprit". Comment avec de telles définitions, peut-on parler sérieusement des espaces de fonctions.
Bien sûr, le concept de fonction ne peut pas être défini sans introduire une nouvelle notion primitive essentielle (en ce qui concerne l'arithmétique). Très peu de mathématiciens ont accepté comme nouveau concept, la notion de fonction elle-même. Une tentative a été faite par Neumann qui a écrit un grand article sur les axiomatiques de la théorie des ensembles basées sur le

concept de fonction comme notion primitive. Bien que possédant beaucoup d'avantages, ces axiomatiques n'ont pas été approuvées et ont été remplacées par les axiomatiques de Gödel basées sur la notion primitive de classe.

Peano est l'auteur d'une autre conception : selon celle-ci, le concept de fonction devrait être réduit au concept de relation. Peano a introduit le concept de relation univoque et a argumenté de manière convaincante que les fonctions devraient être identifiées avec de telles relations. Il doit être mentionné que inversement la notion de relation peut être réduite à la notion de fonction (à deux arguments), et si on a la notion de paire, au concept de fonction à un argument. Haussdorf a mis cette idée explicitement dans son livre, "Grundzugz der Mengenlehre" en 1913.
L'idée de Peano a été acceptée par Russell et Whitehead dans leur "Principia Mathematica" où ils ont largement développé la théorie des relations. Cependant, l'idée la plus populaire était celle de la réduction du concept de fonction à celui du concept de paire ordonnée. Haussdorf, encore, est l'auteur de cette idée. Les explications d'Haussdorf concernant la notion de paire ordonnée étaient assez claires; cependant, elles reliaient la notion de paire ordonnée à deux objets choisis arbitrairement a et b. Ce "défaut de beauté" a été retiré en 1920 par Kuratowski $[(a, b) := \{a, \{a, b\}\}]$. En introduisant le concept de fonction comme une notion primitive, ou sur les bases de la théorie des ensembles, nous nous sommes donné la possibilité d'opérer sur des ensembles ou des espaces de fonctions et de développer des conceptions modernes".

La définition de fonction ainsi nommée de Peano a été introduite dans l'enseignement au niveau secondaire (et parfois même plus tôt) durant la période des réformes des mathématiques modernes. La raison de cela n'est pas tout à fait claire : les étudiants n'étaient pas supposés opérer sur des espaces de fonctions; les théorèmes généraux sur la continuité, la différentiabilité et l'intégrabilité étaient proposés dans les écoles secondaires supérieures pour seulement un petit nombre d'étudiants. Donc, la décision de réduire les fonctions aux relations peut à peine être justifiée dans les domaines didactiques.

La décision ne semble pas être mieux justifiée dans les domaines épistémologiques. Grize dit à juste titre :
"Réunion, intersection et complémentation, qui sont des opérations fondamentales pour les relations, semblent assez secondaires pour les fonctions. Sans prétendre que la composition de deux relations soit une opération rare, on peut cependant constater qu'elle est considérablement plus importante pour les fonctions. D'autres part des propriétés comme celle de la transiti-

vité, de symétrie ou de réflexivité, dont aucune étude, même élémentaire ne saurait se passer, ne joue qu'un rôle assez effacé dans la théorie des fonctions. Il peut certes être très utile, par exemple, de savoir que telle fonction est symétrique, les phénomènes physiques qu'elle pourra représenter offriront alors des propriétés intéressantes, mais la chose reste comme extérieure à la notion elle-même.
...Les opérations psychologiques en jeu dans les relations et dans les fonctions pourraient aussi différer. Et, en effet, on peut noter que si deux objets concrets peuvent être bien en relation l'un avec l'autre, si, par exemple l'un peut être à gauche de l'autre ou s'il peut avoir été engendré avant, en revanche un objet ne peut pas à proprement parler être fonction de l'autre. Il y aura fonction dans la mesure seulement où une certaine propriété de l'un sera reliée à une propriété de l'autre. On est ainsi conduit à penser que les opérations de mise en relation pourraient être, en quelque sorte, plus primitives que celles de mise en rapport fonctionnel. Il se pourrait que l'aspect constructif repose davantage sur la fonction et l'aspect constatatif sur la relation".

Cela mène à une condition supplémentaire de compréhension du concept de fonction.

Acte de compréhension 12 : *La distinction entre les concepts de fonction et de relation.*

Les actes de compréhension relatifs aux représentations des fonctions.

Beaucoup de représentations différentes des fonctions sont utilisées, parmi lesquelles les tableaux, les graphiques, les formules analytiques sont les plus largement connues et utilisées, au moins à l'école. La conscience des limitations de chacune de ces représentations et du fait qu'elles représentent un et même concept général sont certainement des conditions fondamentales de la compréhension des fonctions. L'habileté à interpréter un graphe ou un tableau n'est pas en fait simple à acquérir. C'est au cours de l'apprentissage de cette habileté que les actes fondamentaux de compréhension trouvent des conditions pour se produire.

<u>Les tableaux de fonctions.</u>
Les tableaux sont considérés comme la plus vieille manière de représenter des relations ou des transformations. Si les tableaux sont identifiés avec des fonctions alors il est possible que toutes les fonctions soient perçues comme des suites.

Obstacle 13 : *(Conception des fonctions)*
Les fonctions sont des suites.

Les suites semblent être un type privilégié de fonction. La raison peut être que les variables sont souvent supposées tacitement admettre successivement un nombre fini ou infini de valeurs. Les variables de Cauchy étaient en fait des suites : "On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres".

Acte de compréhension 13 : *La distinction entre les notions de fonction et de suite.*

Une conséquence possible de l'identification des tableaux de fonctions avec les fonctions elles-mêmes est la croyance que les méthodes d'interpolation donnent des valeurs exactes des fonctions en des points intermédiaires.

Les fonctions et les courbes.
L'étude des courbes a joué un rôle important dans l'histoire du concept de fonction. Les courbes ont fourni un contexte dans lequel les outils analytiques pour décrire les relations pouvaient être développés. La genèse du Calculus est, en fait, liée à la découverte des tangentes, des normales et des surfaces sous les courbes. Leibniz a introduit ses notions de Calculus dans le contexte de la géométrie analytique, et c'est dans ce contexte que lui et Bernoulli ont inventé le terme "fonction" et en sont venus à formuler sa première définition.

La recherche d'un nombre minimal de quantités géométriques et les simples bien que suffisantes relations quantitatives entre elles qui définiraient une courbe mécaniquement (comme la trajectoire d'un point qui se déplace ou comme l'intersection de surfaces dans l'espace), a fourni une expérience mathématique qui a mené plus tard aux notions de systèmes de coordonnées, d'équation d'une courbe dans un système de coordonnées et, finalement, au concept de graphique d'une fonction. L'équation d'une courbe décrit la relation entre les coordonnées et un point arbitraire de la courbe, dont la relation, dans certains domaines des variables, est une relation fonctionnelle.

Les courbes, cependant, si utiles dans le développement des idées de Calculus au 17ème siècle, n'étaient pas considérées comme des graphes de relations données, par exemple, par des équations. Les courbes étaient d'abord là, comme des objets géométriques, des lieux géométriques ou des trajectoires de points qui se déplacent. Les équations étaient seulement les indices de ces courbes, ou de leur nature comme dirait Newton. Fermat décrirait les courbes par des proportions entre quelques segments auxiliaires (diamètre, axe, ...).

Le système des segments auxiliaires était choisi pour chaque courbe ou chaque classe de courbes séparément ; les coordonnées n'étaient pas des nombres déterminés par un système d'axes choisi à l'avance. Elles étaient des segments, des objets géométriques.

Obstacle 14 : *(Conception des coordonnées)*
Les coordonnées d'un point sont des segments et pas des nombres.

Acte de compréhension 14 : *La distinction entre les coordonnées d'un point d'une courbe et les segments remplissant une fonction pour la courbe.*

Cette dernière condition semble être justement aussi importante pour les étudiants d'aujourd'hui que pour les mathématiciens des 17ème et 18ème siècles.
Tout cela ne signifie pas que les graphiques des relations entre les variables n'étaient pas présentes. Le premier graphe connu vient du 11ème siècle. Il illustre les changements de latitude (l'axe vertical) de la position des planètes comme reliés à la longitude (l'axe horizontal). Cependant, les notions de graphique et de courbe se sont développées séparément pendant longtemps. Les mathématiciens ont utilisé les courbes comme des modèles géométriques, utiles, des relations. Ces modèles n'avaient pas besoin de représenter les relations très fidèlement. Les représentations d'Oresme étaient, en fait, plutôt qualitatives que quantitatives. Certains diagrammes utilisés par Fourier au 19ème siècle semblent aussi être plutôt des modèles que des graphiques.

Obstacle 15 : *(Conception du graphique d'une fonction)*
Le graphique d'une fonction est un modèle géométrique de relation fonctionnelle. Il n'a pas besoin d'être fidèle, il peut contenir des points (x, y) tels que la fonction n'est pas définie en x.

Les étudiants essayent d'identifier des fonctions avec des diagrammes géométriques parfois utilisés pour les représenter. Certains étudiants voient ces diagrammes d'une manière synthétique et concrète. Cela signifie que les fonctions sont considérées comme des objets géométriques, des idéalisations de lignes sur le papier, ou de trajectoires de points se déplaçant. Ils classent les fonctions selon la forme de ces objets (une parabole, une fonction sinus, ...). Parfois même les axes sont inclus dans l'idée de fonction sans signification systématique pour la ligne représentant la fonction. (Les formes des graphiques des fonctions élémentaires peuvent être des prototypes dans cette conception).

Les autres étudiants ont une vue plus analytique des représentations grala chose que le professeur appelle "fonction". Et parfois, c'est une expression algébrique ou même une inscription contenant des lettres et des nombres, et c'est mieux si les lettres sont x et y plutôt que a et m. Le professeur ne dit-il pas : "Considérons la fonction $y = 2x - 3$" ?

Pour deux étudiants dans l'expérience, l'expression algébrique pour la loi de la fonction a joué le rôle du code ou du nom de la fonction. Ag et Pr ont décidé de travailler directement avec un ordinateur pour résoudre le problème suivant : trouver les fonctions f telles que $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$ et ayant un point attractif fixé dans l'intervalle $(2, 3)$. Il a semblé que, pour eux, la fonction était juste une certaine forme sur l'écran de l'ordinateur, apparaissant après l'entrée d'une certaine expression algébrique. Cette expression algébrique ne décrivait pas la relation entre les coordonnées des points de la courbe mais était, pour eux, juste un code ou le nom de la fonction. Ils ne concevaient pas cette expression analytiquement. Par exemple, ils ne pensaient pas à substituer 2 pour x dans la formule qu'ils proposaient pour vérifier s'ils obtenaient 3 ou pas. Ils changeraient seulement (au hasard d'abord) les paramètres dans l'expression algébrique et verraient quel effet cela donne sur l'écran. (Etudiants de 16 ans en mathématiques- physique).

Les fonctions et leurs représentations : la distinction et la synthèse.
Les fonctions peuvent être représentées de beaucoup de manières différentes. Mais la représentation n'est pas la même chose que la chose représentée.

Acte de compréhension 15 : *La distinction entre les différents moyens de représenter les fonctions et les fonctions elles-mêmes.*

On parle aussi des fonctions de différentes manières. Certaines de ces manières sont dynamiques (transformations), certaines sont statiques (relations) ; certaines sont opérationnelles ou constructives, certaines ne le sont pas. Par exemple, la définition de Cauchy peut être comptée parmi celles du dernier type. Elle est opérationnelle. Et il est intéressant de voir que les verbalisations de deux étudiants de notre expérience étaient proches de cette définition. La manière de Dk de parler de $f(x)$ et $ff(x)$ a été rapportée plus tôt. Ia, à qui Dk expliquait ce qu'est un point attractif dit : "Nous avons le graphe de la fonction $y = -2x + 1$. Si vous prenez un point x zéro, c'est un certain nombre réel, et que vous le mettez à la place de x dans la formule, et vous calculez, alors vous n'obtenez pas plus un. Vous obtenez moins un !"
Dans le groupe d'étudiants de 15 ans en mathématiques et physique, la notation utilisée à une séance pour "la valeur de la fonction en 2 est 3 et la valeur de la fonction en 3 est 2" était : "$x(2) = 3$, $x(3) = 2$". Cela doit probablement être lu comme : "substituer 2 pour x dans la formule et vous devriez obte-

nir 3". C'est peut être le signe d'une très fréquente compréhension du signe d'égalité comme l'instruction d'exécuter les opérations à gauche. D'un autre côté, cela peut être interprété comme un indice d'une vue des fonctions qui est plus proche de la notion dynamique de transformation que de la notion statique de relation.

Comme les fonctions sont appliquées dans des contextes différents, des termes différents pour les mêmes choses sont utilisés. Nous disons : la valeur d'une fonction, le terme de la suite, l'image d'un point. En physique, nous disons : à la température de 273K, le volume d'une mole de gaz est 221. La fonction assigne quelque chose à un nombre, une suite ordonne un ensemble de façon discrète, une transformation organise, une loi établit un rapport entre deux ou plusieurs grandeurs.

A un certain moment, une synthèse de toutes ces différentes conceptions en une idée générale de fonction qui unifie ainsi beaucoup de domaines des mathématiques, de la physique et des autres sciences doit être réalisée.

Acte de compréhension 16 : *La synthèse des différentes manières de donner des fonctions, de représenter des fonctions et de parler des fonctions.*

Les notions de fonction et de cause

Il a été rapporté que les étudiants confondent parfois les notions de fonction et de cause : le changement de x est ce qui cause le changement de y.

Cela ne devrait pas nous surprendre tant que cela. La notion de cause a joué un rôle important dans le développement général de la pensée scientifique déjà depuis Aristote, bien que "cause" n'a pas toujours et partout signifié la même chose pour tout le monde. Dans l'opinion de certains historiens, la question des causes était une étape importante dans le développement du concept de fonction.

Il y a des ressemblances aussi bien que des différences dans les notions de cause et de fonction, et en devenir conscient enrichit certainement notre compréhension du concept de fonction.

Selon Aristote, l'interrogation sur les causes des phénomènes observés ou des faits est ce qui fait la différence entre un homme de connaissance et un ouvrier qualifié : "les architectes sont plus louables que les artisans car ils connaissent les causes de ce qui a été produit tandis que les ouvriers réalisent comme une nature inanimée". Aujourd'hui, on proclame que la science est caractérisée par la pensée fonctionnelle. Que voulait dire Aristote quand il disait que "les architectes connaissent les causes de ce qui est

produit" ? A quelles questions sont supposés répondre ces architectes ? Prenons un exemple. Qu'est ce que cela signifie, selon Aristote, de connaître les causes de la naissance de quelque chose ? (maison, santé). Une lecture du livre "Metaphysics" nous donne la conclusion que cela signifierait d'être capable de répondre aux questions suivantes (supposons ce quelque chose noté par la lettre H) :
1. Comment ou grâce à quoi H est-il né ?
2. D'où est né H ?
3. Que devient H ?
4. Quels sont les principes (quel est le motif) selon lesquels H est-il né ?
5. Quelles actions devaient être entreprises pour faire naître H ?

Aristote considère les réponses possibles suivantes aux questions ci-dessus : Quelque chose vient au monde soit naturellement, ou à travers l'art, ou par chance. Tout vient de la matière. La matière est le nom d'où les choses viennent. La question 3 s'occupe du résultat du changement : quel est le nouvel état (un nouveau building, un rétablissement d'une maladie). La question 4 s'occupe de ce qui est habituellement traduit par la "forme" ou le "patron". La manière avec laquelle Aristote utilise ces mots dans des phrases suggère que la réponse attendue consiste à fournir des principes (ex. de l'art médical) ou un schéma, ou un programme, ou un motif d'action : "L'art médical et l'art de construire une maison sont les formes de la santé et de maison". La dernière question s'occupe de l'action qui pourrait être entreprise pour atteindre le but ou l'état qui est visé (une thérapie concrète ou un ensemble d'instructions pour construire une maison particulière). La réponse à cette question est habituellement traduite par le latin "causa efficiens". La question 4 s'occupe de la pensée : l'élaboration d'un plan d'action. La question 5 s'occupe de la réalisation de ce plan : "une partie de la production et du déplacement est appelée pensée et l'autre action ; l'action est le type de déplacement qui est impliqué par les résultats de la pensée". Les questions 1-5, après quelques modifications, peuvent être considérées comme des questions au sujet des fonctions :

Soit $f : X \to Y$ une fonction, et X et Y des ensembles. Nous pourrions utiliser la convention de dire que les éléments de l'ensemble $f(X)$ sont nés à partir des éléments de l'ensemble X. Alors la question 1 est de savoir si la relation f est physique, découverte par expérience ou expérimentation, ou une relation artificielle (par exemple, un modèle mathématique d'une relation physique). La question 2 concerne la définition des éléments de X : que sont-ils ? Des nombres ? Des figures géométriques ? Le plan ? Des grandeurs physiques comme la vitesse ou la pression ? Le prix ? ...). De façon symétrique, la question 3 demande une définition des éléments de l'ensemble Y. La question 4 demande que le principe (règle, formule) soit défini : comment les éléments de $f(X)$ sont-ils nés à partir des éléments de X ? La question 5 peut être considérée comme caractéristique d'un point de vue constructiviste : il n'est pas suffisant de connaître le principe de naissance. Un algorithme pour l'actualisation de ce principe doit être donné.

Une chose qui manque ici, est la condition que le principe assigne un seul élément y à chaque élément x. D'un autre côté, certaines des conditions d'Aristote doivent être rejetées, comme la revendication que la source d'un changement doit se trouver dans une certaine substance, et que tous les changements sont des changements dans le temps (qui est absolu). L'hypothèse selon laquelle tous les changements sont causés par une certaine substance avait été un obstacle fort au développement de la physique et a mené les scientifiques à s'égarer (les théories d'un fluide de chaleur). Pour Bachelard (1938), la recherche des causes matérielles des changements est un indice de cet obstacle substantialiste.

Obstacle 16 : *(Conception de variable)*
Les changements d'une variable sont des changements dans le temps.

Acte de comprêhension 17 : *La généralisation de la notion de variable.*

La notion de cause a subi un dépréciation considérable dans les temps modernes. La désapprobation par Galilée des considérations sur les causes du déplacement est bien connue. Wittgenstein dans "Le traité logico-philosophique" et Russell dans "Sur la notion de cause" avaient prétendu que la loi de causalité est une superstition irrationnelle, une relique des temps anciens. Les positivistes logiques ont proposé de remplacer la notion de cause par la notion de fonction. Des échos de cette position peuvent être entendus dans la discussion de Piaget sur les fonctions causales et dans l'analyse de causalité de Lucas. Dans son étude minutieuse de causalité, Mario Bunge a mis en évidence les défauts de cette approche. La notion de causalité, dit-il, ne peut pas être réduite à la notion de fonction :
"Les fonctions peuvent être utilisées pour la description des processus à la fois causals et non-causals. Cependant, la dépendance fonctionnelle par elle-même ne constitue pas un type de détermination. Quand une signification causale est donnée à certains symboles dans la fonction (rarement on peut attribuer une signification causale à toutes les variables), une telle fonction interprétée représentera une relation causale. En d'autres mots, les fonctions sont de simples formes synthétiques comme telles, elles ne peuvent pas rem-

placer des déclarations causales. Mentionnons une fois de plus la nature formelle des constructions mathématiques. Les fonctions sont des "formes" mathématiques qui peuvent être "remplies avec un contenu" en une infinité de manières, sans exclure les déclarations non-scientifiques (non-vérifiables). Les fonctions, comme d'autres constructions mathématiques, nous aident à exprimer certaines caractéristiques des régularités à la fois causales et non-causales. De plus, les fonctions par elles-mêmes ne sont ni de vraies ni de fausses descriptions de faits ; nous pouvons formuler avec leur aide à la fois des déclarations vraies et erronées. Les scientifiques qui sont conscients de cette neutralité sémantique des mathématiques, rejettent la naïve opinion que, si, comme on le prétend, la forme mathématique décide du fait qu'un concept ou une déclaration soit scientifique, alors une définition véritablement scientifique de causalité consisterait en son identification avec une forme mathématique appropriée".

Acte de compréhension 18 : *La synthèse des rôles des notions de fonction et de cause dans l'histoire des sciences : la conscience du fait que les recherches des relations fonctionnelles et causales sont les expressions de l'effort humain pour comprendre et expliquer les changements dans le monde.*

Acte de compréhension 19 : *La distinction entre les notions de relations fonctionnelles et causales.*

Une implication pédagogique de cette condition est que si la notion de fonction n'apparaît pas aux étudiants comme un des outils possibles en essayant de répondre à leurs questions sur la variabilité du monde alors cela peut rester sans signification pour eux en dehors de la classe des mathématiques.

1.1.7 Remarques finales.

Quelques conclusions didactiques.

Cela n'a pas été notre but dans cet écrit de décrire les conditions d'apprentissage du concept de fonction. Celles-ci devraient probablement prendre en compte les aspects sociologiques, psychologiques et didactiques de l'apprentissage et de l'enseignement dans une classe de mathématiques. Des contextes mathématiques spécifiques où le concept de fonction devient significatif devraient être décrits. Des tâches tenant compte du fait que des actes spécifiés de compréhension se produisent devraient être trouvées et expérimentées. Cependant, l'analyse épistémologique du concept tient compte de certaines suggestions pédagogiques. Rappelons celles qui ont été pointées dans les parties précédentes.

1. Concernant la motivation : les étudiants doivent être intéressés par l'explication des changements, par la recherche de régularités parmi les changements; ils devraient percevoir les changements et les relations entre eux comme un problème digne d'une explication scientifique. On devrait leur donner des opportunités d'utiliser les connaissances sur les fonctions pour expliquer des phénomènes de leur vie de tous les jours, vie économique et sociale, ou au sujet des fonctions rencontrées dans d'autres sciences. Les fonctions peuvent apparaître comme des modèles de certaines relations qu'ils observent. Mais, elles peuvent aussi apparaître comme des outils pour représenter un système dans un autre système (alors nous parlerions plutôt de transformations).

2. Concernant les contextes introductifs : les fonctions sous une forme analytique devraient premièrement apparaître comme outils dans la modélisation de certaines situations de la vie réelle et en sciences. La présentation de la situation réelle n'a pas besoin d'être idéalisée au point de tourner la construction du modèle en un exercice simple avec une réponse unique. Le choix du modèle devrait être soumis à une discussion en classe.

3. Concernant les contextes de développement : les méthodes d'interpolation en utilisant et construisant des tableaux numériques fournissent des contextes mathématiques dans lesquels des niveaux plus profonds de la notion de fonction deviennent significatifs.

4. Concernant le développement d'un niveau plus élaboré de compréhension des fonctions : en étudiant les fonctions, il est important d'amener les étudiants à percevoir et verbaliser les sujets des changements : les étudiants devraient être capables de dire non seulement "comment ça change" mais aussi "ce qui change".

5. Concernant les conditions préalables : une certaine conscience algébrique sur le niveau de structure est nécessaire pour comprendre des fonctions. L'introduction de la définition générale de fonction ne fait pas sens avant qu'une certaine culture mathématique ne soit développée chez les étudiants, en particulier avant qu'ils ne soient conscients du rôle et de la place des définitions en mathématiques.

6. Concernant les représentations : il est important de fournir aux étudiants un large spectre des manières de donner des fonctions, de parler des fonctions (transformations,..) et de représenter des fonctions pour prévenir l'identification par les étudiants de l'une de ces représentations avec les fonctions. On devrait donner aux étudiants une possibilité d'acquérir une certaine flexibilité en utilisant ces modes d'expression et de représentation.

7. Concernant les définitions : l'introduction du concept de fonction posé théoriquement comme un type particulier de relation, est un peu justifié à la fois par les points de vue didactiques et épistémologiques. Les définitions informelles ressemblant à celle de Dirichlet sont suffisantes au niveau secondaire. A des niveaux plus élevés, quand la notion de relation est étudiée pour son propre intérêt, la définition de Peano peut être discutée et les étudiants devraient être amenés à distinguer les rôles et les significations des concepts de relation et de fonction en mathématiques.

8. Concernant la distinction entre la notion de fonction et les autres notions générales : la discussion en classe des ressemblances et différences entre les relations causales et fonctionnelles peut contribuer à une meilleure compréhension de ces deux notions.

Etudes épistémologiques versus études historiques des concepts

Nous avons essayé d'identifier les actes de compréhension qui construisent le concept de fonction dans un esprit individuel. Nous nous sommes aidés de connaissances sur l'histoire du concept. Cependant, une étude épistémologique du concept diffère de son histoire. Bachelard dit :
"Ce qui distingue le métier de l'épistémologue de celui de l'historien des sciences : l'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme les idées, en les insérant dans un système de pensée. Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est, au gré de l'épistémologue, un obstacle, une contre-pensée".

Les histoires d'un concept mathématique sont habituellement présentées comme si le développement du concept suivait une courbe lisse avec un gradient positif. L'apprentissage ne peut donc pas être modélisé. A des plus grandes profondeurs cognitives, des catastrophes se produisent. Elles sont marquées par des actes de compréhension cruciaux pour un concept donné.

Ces actes consistent souvent en une cassure abrupte avec une certaine manière de connaître, en dépassant un obstacle, et non en un développement lisse de vieilles méthodes de connaissances en de nouvelles. Nous avons défini une compréhension du concept de fonction en termes de changements catastrophiques de méthodes de connaissance.

Apprendre ou ne pas apprendre.

Les actes de compréhension ou les actes de dépassement d'un obstacle sont très exigeants à la fois sur la concentration intellectuelle et la tension émotionnelle. En fait, la seconde accompagne toujours la première. La tension ne peut pas être éliminée de l'apprentissage, c'en est la vraie essence : "il n'y a pas de voie royale vers la géométrie", ou, comme le paraphrase Byers : "il n'y a pas de route indolore pour l'apprentissage". Et il ajoute : "La vraie tâche éducative consiste à gérer et non à éliminer la tension". Cette tension est le plus souvent douloureuse mais, occasionnellement, nous sommes récompensés par un moment de joie intense. Et c'est pour ces quelques moments que certaines personnes décident de supporter toute cette peine. Cependant, la seule alternative à l'apprentissage douloureux semble être de ne pas apprendre du tout.

Chapitre 2

Analyse des obstacles énoncés par Anna Sierpinska

2.1 Ce qui fait partie des mathématiques

Deux premiers obstacles sont liés à la conception que les élèves ont des mathématiques.

Obstacle 1 : ***Les mathématiques ne sont pas concernées par les problèmes pratiques.***

Nous pouvons commencer par nous interroger sur ce qu'est un problème pratique. Pour nous, un problème pratique est un problème de la vie courante comme les problèmes relatifs aux biens consommables et les problèmes relatifs aux "paperasses officielles". Mais, cela peut être aussi un problème qui demande l'application de théories dans une autre discipline que les mathématiques, et par exemple les problèmes concernant la physique.

Cette phrase par laquelle Anna Sierpinska définit l'obstacle 1 est souvent entendue dans la bouche des étudiants.
Pour remédier à cet obstacle, nous pourrions proposer aux élèves des situations-problèmes qui relèvent de problèmes pratiques, des problèmes de la vie de tous les jours.
Les problèmes 1 et 2 ci-dessous pourraient être présentés aux élèves au cours de leur apprentissage en mathématiques. Le premier, concernant les tarifs d'électricité, mobilise chez les élèves un calcul de proportionnalité et fait intervenir les fonctions du premier degré. Il peut donc être présenté à des élèves de troisième secondaire. Ces derniers peuvent en effet formuler une fonction du premier degré à partir d'un tableau. Le second problème relatif à

la consommation d'essence, fait également intervenir les fonctions du premier degré.

Tarifs d'électricité

En Belgique, différentes compagnies distribuent de l'électricité. Les particuliers ou les entreprises paient leur consommation selon une tarification comme celle qui est présentée ci-dessous (Tableau 3). La consommation proprement dite est mesurée en kWh.

Prenons un exemple : si on laisse une lampe de 100 Watt allumée pendant 1 heure, on aura consommé 100 Wattheure. Si on laisse allumées 10 lampes de 100 W pendant une heure, ou une lampe de 100 W pendant 10 heures, on aura consommé 1 000 W pendant une heure, c'est-à-dire 1 kiloWatt pendant une heure, ou encore 1 kWh.

2.1. Le Tableau 3 donne un extrait de la tarification utilisée par une société d'électricité en Belgique.

a) Calculer le montant de la facture d'électricité, pour l'année écoulée, pour chacune des quatre situations suivantes :
* une famille nombreuse ayant consommé 4 250 kWh,
* une seconde résidence pour laquelle la consommation s'élève à 355 kWh,
* une famille bénéficiant du tarif social et qui a consommé 2 100 kWh,
* une personne seule ayant consommé 950 kWh.

b) Dans quel cas le prix est-il proportionnel à la consommation ?

c) Trouver une (ou plusieurs) formule(s) permettant de calculer le prix à payer quand on connaît le nombre x de kWh consommés.

	Redevance fixe annuelle	Prix par kWh
Tarif social : appliqué à certains allocataires sociaux	0F	5,80 F
Tarif petites fournitures, pour les consommations a) inférieures ou égales à 365 kWh/an b) comprises entre 366 et 1 500 kWh/an	 0 F 988 F	 9,89 F 7,18 F
Tarif normal : appliqué à toute consommation résidentielle (supérieure à 1 500 kWh)	3 069 F	5,80 F

Tab. 3

figure 2.1: Problème 1, issu de De question en question 3, 1996

Consommation d'essence

Deux voitures ont respectivement un réservoir d'une capacité de 45 litres et de 50 litres. En moyenne, les consommations de ces véhicules pour 100 km parcourus sont les suivantes :
Voiture A : 4,7 litres ;
Voiture B : 6 litres.

a) Lorsqu'il ne reste plus que 6 litres dans le réservoir, le voyant lumineux s'allume. Après combien de kilomètres cela se produira-t-il pour chaque voiture, si leurs réservoirs sont pleins au départ ?

b) Pour chacune des voitures, trouver une formule qui permette de calculer le nombre de litres restant après 100 km, 250 km et après un nombre x quelconque de centaines de kilomètres parcourus après le remplissage des réservoirs.

c) Quelle distance peut se permettre de parcourir le propriétaire de la voiture B s'il tient à conserver au moins 20 litres dans le réservoir ?

Remarquons pour commencer que puisque les consommations données dans ce problème sont des consommations moyennes, les réponses que nous donnerons correspondront elles aussi à des moyennes.

a) Dans la première voiture, le voyant lumineux s'allumera dès que

$$45 - 6 = 39$$

litres auront été consommés. La voiture aura alors parcouru (en centaines de kilomètres)

$$\frac{39}{4,7} = 8,297.$$

ou (en kilomètres)

$$\frac{39}{4,7} \times 100 = 829,787...$$

Pour la deuxième voiture un calcul analogue donne (en kilomètres)

$$\frac{44}{6} \times 100 = 733,33...$$

b) Quand la voiture A a parcouru 100 km, elle a consommé 4,7 litres. Il reste donc dans le réservoir (en litres)

$$V_A = 45 - 4,7 = 40,3.$$

Après 250 km, le volume restant sera

$$V_A = 45 - 2,5 \times 4,7 = 45 - 11,75 = 33,25.$$

Après x centaines de kilomètres, le réservoir ne contient plus que

$$V_A = 45 - 4,7\,x. \tag{1}$$

De même pour la voiture B, après 100 kilomètres, 250 kilomètres ou x centaines de kilomètres, il reste dans le réservoir : $V_B = 44$; $V_B = 35$ et

$$V_B = 50 - 6x. \tag{2}$$

figure 2.2: Problème 2, issu de De question en question 3, 1996

Avec de tels exemples, les élèves peuvent alors voir que les mathématiques ne sont pas qu'abstraites, et que beaucoup de matières peuvent être introduites par des problèmes pratiques. Et, ils peuvent aussi saisir que les mathématiques permettent de modéliser ces problèmes.
L'introduction relativement récente de telles activités dans les manuels montre que l'enseignement actuel s'intéresse à ces problèmes pratiques.
Notons que beaucoup de ces problèmes pratiques relèvent de fonctions affines par morceaux, parce que la "tarification" se fait par tranche (par exemple : les impôts des personnes physiques, cfr activité 4, les droits de succession, ...).

Mais, une autre distinction doit être considérée. Il s'agit de la distinction entre les problèmes pratiques et les problèmes concrets. Le problème 3 qui concerne le remplissage d'une piscine est un problème concret mais pas pratique. En effet, personne ne se pose ce type de question avant de remplir sa piscine. Ce problème fait intervenir les concepts de fonction du second degré et de dérivée.

On pompe l'eau d'une piscine de 10 m de long, 5 m de large et 2,5 m de profondeur du côté droit (Fig. 5.8) à un débit de 0,1 m^3/min.

a) Sachant que le volume V à une profondeur h est de $\frac{5Lh}{2}$, déterminez V en fonction de h uniquement.

b) Sachant qu'au temps $t = 0$, la piscine est remplie, déterminez V en fonction de t. Combien de temps faudra-t-il pour que la piscine soit vide ?

c) À partir de a) et b), exprimez h en fonction du temps.

d) À quelle vitesse le niveau d'eau descend-il ? Donnez cette vitesse, en particulier lorsque $t = 0$, puis lorque $h = 1$.

a) À tout moment t, la hauteur h de l'eau et la longueur L qu'occupe sa surface sont dans une même proportion vis-à-vis de la hauteur totale 2,5 m et de la longueur totale 10 m de la piscine. Cela s'écrit

$$\frac{h}{2,5} = \frac{L}{10} \text{ ou } L = 4h.$$

Dès lors, $V(h) = 10h^2$ (h en m et V en m^3).

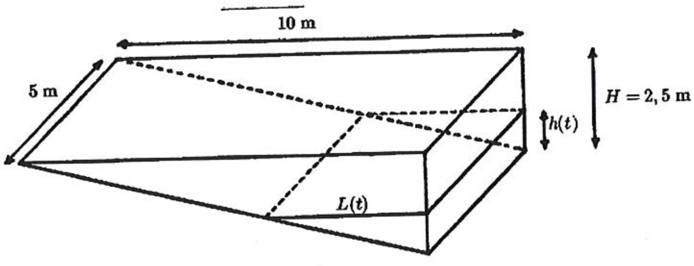


Figure 5. 8

figure 2.3: Problème 3, issu du groupe AHA, 1999

Anna Sierpinska cite un autre obstacle concernant le contenu des mathématiques.

Obstacle 2 : ***Les techniques de calcul utilisées dans la construction des tables numériques ne sont pas dignes d'être un objet d'étude en mathématiques.***

Nous nous interrogeons d'abord sur ce que l'auteur met derrière le mot "tables". Une fonction peut, en effet, être donnée par un tableau ou par des tables comme les fonctions sinus et logarithme. Historiquement, le sinus et l'exponentielle étaient des fonctions jugées différentes des autres car on ne pouvait pas les exprimer à l'aide d'opérations "classiques" comme la somme, la multiplication, les puissances ou encore les racines.

Anna Sierpinska relie l'obstacle 2 à l'obstacle 1, sans doute parce que plusieurs problèmes pratiques se résolvaient, dans l'histoire et dans un enseignement aujourd'hui révolu, à l'aide de tables numériques. Par exemple, les tables des fonctions trigonométriques permettaient de résoudre des problèmes en astronomie et en géodésie, les logarithmes permettaient de traiter

des problèmes d'échanges commerciaux ou bancaires.
Cependant, pour nous, cet obstacle est plus lié à l'obstacle 11 : *Seules les relations descriptibles par des formules analytiques sont dignes de recevoir le nom de fonction.* En ce sens, il est, pour nous, nécessaire de travailler deux choses avec les élèves.

1. Le fait qu'une fonction puisse être donnée par un tableau.
2. Le travail de modélisation d'une fonction par une formule à partir d'un tableau numérique.

On pourrait ainsi éviter de tomber dans des considérations comme celles d'Euler (18ème siècle) sur lesquelles nous reviendrons, qui ne regardait comme fonctions que celles données par une formule algébrique.

Pour que les élèves soient familiarisés avec le travail relatif aux tableaux, nous pourrions leur proposer des activités telles que l'activité 2 concernant la consommation d'essence (ci-dessus) et l'activité 4 concernant l'impôt des personnes physiques (ci-dessous). En effet, pour l'activité 2, les élèves peuvent constituer un tableau reprenant l'état du reservoir en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

$$45 - 4,7 \times 1$$
$$45 - 4,7 \times 2$$
$$45 - 4,7 \times 3$$

Ils peuvent, ainsi, faire apparaître la formule par des essais, à condition de ne pas effectuer les calculs pour mieux mettre en évidence leur structure. Dans les trois calculs ci-dessus, on voit apparaître des parties invariantes "45 - 4,7 ×". Le facteur qui change, est celui par lequel on multiplie 4,7, qui devient 1, 2, 3 et qui sera remplacé par x.

L'activité 4 qui est proposée peut constituer un démarrage pour l'introduction des fonctions. Elle mobilise de nouveau les fonctions du premier degré et peut ainsi être présentée à des élèves de troisième secondaire. Cependant, cette activité offre une difficulté non négligeable dont nous parlerons plus loin, à savoir qu'à une seule et même fonction puissent être associées plusieurs expressions analytiques.

Nous pouvons aussi inciter les élèves à construire un tableau à partir de l'expression analytique d'une fonction.
Ils pourront ainsi constater que pour une fonction du premier degré, à un Δx constant correspond un Δy constant. Et, en ce qui concerne les fonctions

du second degré, ils pourront observer qu'à un Δx constant ne correspond pas un Δy constant, mais un $\Delta\Delta y$ constant. Grâce à ces tableaux, les élèves pourront également remarquer le comportement asymptotique de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

L'impôt des personnes physiques

«Le pouvoir de taxer n'est pas seulement le pouvoir d'amputer, c'est aussi le pouvoir de maintenir en vie.»
(Cour Suprême des États-Unis)

Pour couvrir les besoins collectifs, l'État récolte des fonds (impôts ou taxes) auprès des citoyens et des sociétés. La manière de les récolter contribue à déterminer la répartition des revenus. Nous examinerons ici l'impôt des personnes physiques en Belgique pour l'année 1990.

Le tableau 1 reprend les taux d'imposition applicables par tranches de revenus en 1990 (revenus de 1989).

Le terme excédent en tête de la quatrième colonne désigne la part des revenus qui dépasse la limite inférieure de la tranche.

Tableau 1

Plus de	mais pas plus de	L'impôt de base s'élève à	plus, sur l'excédent
0	130 000(*)	0	0 %
130 000(*)	230 000	0	25 %
230 000	305 000	25 000	30 %
305 000	435 000	47 500	40 %
435 000	1 000 000	99 500	45 %
1 000 000	1 500 000	353 750	50 %
1 500 000	2 200 000	603 750	52,5 %
2 200 000	———	971 250	55 %

(*) 165 000 pour les isolés.

a) Familiarisez-vous avec ce tableau en calculant l'impôt dû pour un revenu imposable annuel de 200 000 F, 500 000 F, 2 millions de francs, 10 millions de francs.

Si x désigne le revenu imposable annuel, donnez pour chaque tranche la formule (on dit aussi l'expression analytique) qui permet de trouver l'impôt $i(x)$. Si vous disposez de calculatrices programmables ou de micro-ordinateurs, établissez un programme qui permet de déterminer i en fonction de x.

b) Que penser des affirmations suivantes ? —«Ça ne sert à rien que je travaille plus, je vais tomber dans une tranche d'impôt supérieure et je gagnerai finalement moins que maintenant.» —«En général, on dit que 50% du revenu est perdu sous forme d'impôts.»

c) Examinez ce qu'apporte une représentation graphique des questions ci-dessus.

figure 2.4: Problème 4, issu de De question en question 3, 1996

Un autre exemple de l'utilisation des tableaux peut être souligné dans l'expérience que nous avons menée dans les classes de quatrième. Nous avions proposé l'activité suivante : trouver l'équation de la courbe translatée de trois unités "vers la droite" de la courbe $y = x^2$. Cette fois encore, les élèves pouvaient travailler avec des tableaux numériques et essayer de dégager les régularités de ce tableau pour parvenir à l'expression analytique de la courbe recherchée.

Dans le cadre des grandeurs proportionnelles, les tableaux numériques sont également souvent utilisés. On peut alors établir qu'une grandeur G_1 est proportionnelle à une autre G_2 en observant le tableau qui associe leurs valeurs respectives, qu'il soit structuré en lignes ou en colonnes. Dans le premier cas, on peut reconnaître un tableau de proportionnalité lorsque, comme décrit dans CREM (2002), les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Chaque fois qu'une multiplication (ou une division) envoie un nombre d'une ligne sur un autre de la même ligne, la même multiplication (ou division) envoie l'une sur l'autre les valeurs correspondantes de l'autre ligne.
2. A la somme de deux valeurs de la première ligne, correspond la somme des valeurs correspondantes de l'autre ligne.
3. Une même multiplication (ou une division) envoie un nombre quelconque de la première ligne sur son correspondant dans la deuxième ligne.

Un exemple de ce traitement des tableaux est le problème 5 ci-dessous . Il concerne la dépendance entre la base et la hauteur de rectangles choisis.

Considérons la dépendance entre les grandeurs, base et hauteur, d'une famille particulière de rectangles. Les dimensions de quelques rectangles de cette famille sont présentées dans le tableau 1 : la première ligne comporte des mesures possibles pour la base des rectangles et la seconde ligne, les mesures correspondantes des hauteurs.

$\times 2$ $\quad$ $\times \frac{5}{3}$

base (en demi-cm)	1	2	3	4	5	6
hauteur (en demi-cm)	1,5	3	4,5	6	7,5	9

$\times 2$ $\quad$ $\times \frac{5}{3}$ $\qquad$ $\times \frac{3}{2}$ $\quad$ $\times \frac{2}{3}$

Tableau 1

On peut observer plusieurs propriétés de ce tableau. Citons-en quelques-unes.

- Pour passer d'un nombre de la ligne des bases à son correspondant dans la ligne des hauteurs, on le multiplie par $\frac{3}{2}$ c'est-à-dire 1,5 :

$$1 \times 1,5 = 1,5$$
$$2 \times 1,5 = 3$$
$$3 \times 1,5 = 4,5$$
$$4 \times 1,5 = 6$$
$$5 \times 1,5 = 7,5$$
$$6 \times 1,5 = 9$$

Cette propriété peut aussi s'écrire sous forme de rapports égaux :

$$\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4,5} = \frac{4}{6} = \frac{5}{7,5} = \frac{6}{9} \quad \text{ou} \quad \frac{1,5}{1} = \frac{3}{2} = \frac{4,5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7,5}{5} = \frac{9}{6} = 1,5 = \frac{3}{2}$$

Autrement dit, pour tous ces rectangles, le rapport de la base à la hauteur ou le rapport de la hauteur à la base est constant.

- Pour passer d'un nombre d'une colonne à son correspondant dans une autre colonne, on le multiplie par un même nombre. Par exemple,

$$1 \times 2 = 2 \quad \text{et} \quad 1,5 \times 2 = 3$$
$$3 \times \frac{5}{3} = 5 \quad \text{et} \quad 4,5 \times \frac{5}{3} = 7,5$$

Cette propriété peut aussi se traduire sous forme de rapports égaux :

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{1,5} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{3} = \frac{7,5}{4,5}.$$

Le tableau 1 est un exemple de *tableau de proportionnalité*.
Des grandeurs représentées par un tableau de proportionnalité s'appellent *grandeurs proportionnelles*.

figure 2.5: Problème 5, issu du Référentiel de mathématiques, 2002

Nous pouvons également leur proposer des tableaux liés à des phénomènes physiques dans le but de les modéliser, en leur présentant par exemple le problème 6 lié au mouvement uniforme d'un mobile. Celui-ci fait intervenir l'expression de la proportionnalité entre une distance parcourue et le temps nécessaire pour la parcourir.

<u>Mouvement uniforme</u>

Un mobile se déplace à la vitesse v constante de 5 m/s. La distance parcourue d dépend du temps t écoulé. Le calcul de cette distance se fait au moyen de la formule $d = v \cdot t$. Son évolution, de demi-seconde en demi-seconde, est reprise dans le tableau 3 :

temps (en secondes)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
distance (en mètres)	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	0

Tableau 3

La figure 5 représente les données du tableau 3 au moyen d'un diagramme. A nouveau, à la graduation de chaque demi-seconde marquée sur l'axe horizontal, on dresse un segment dont la longueur est proportionnelle, selon une certaine échelle, à la distance parcourue. Les points aux extrémités des segments semblent être alignés : cette droite est le graphique de la fonction.

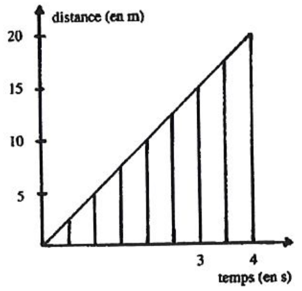


Figure 5

figure 2.6: Problème 6, issu du Référentiel de mathématiques, 2002

Si les élèves ont dans leur culture mathématique l'habitude de travailler avec des tableaux, il est probable que leur utilisation et leur construction ne poseront pas de problèmes.

2.2 Identifier ce qui change

Avant de percevoir ce qui change, il faut que les élèves aient une idée de ce qu'est une variation.
Les problèmes de mouvement, comme le problème 6 (ci-dessus) implique d'emblée une idée de variation qui est celle de la distance parcourue. A un autre niveau, les problèmes de vitesses liées peuvent induire l'intuition qu'une vitesse est variable, et ainsi donner une motivation à la construction du concept de dérivée. Contrastons de ce point de vue les activités 7, 8 et 9 présentées ci-dessous.
Le problème 7 concernant l'onde circulaire, mobilise la notion de dérivée et induit directement l'idée que quand le rayon augmente dans le temps, la vitesse de variation de l'aire augmente également avec le temps.

Une onde circulaire, une tache d'huile

Une pierre est lancée dans l'eau. Elle provoque une onde qui se propage circulairement. Une observation simple montre que le front d'onde se propage à vitesse constante, notée v. À quelle vitesse varie l'aire du disque formé par l'onde ?

Soit $t = 0$ l'instant où la pierre touche l'eau. Le rayon r du disque de l'onde est fonction du temps selon l'expression

$$r(t) = vt,$$

et de là

$$A(t) = \pi v^2 t^2.$$

Cette aire s'agrandit à une vitesse donnée, comme précédemment, par

$$\frac{dA(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = 2\pi v^2 t.$$

Cette vitesse augmente avec le temps.

figure 2.7: Problème 7, issu du projet du groupe AHA, 1999

Par contre, le problème de l'échelle contre un mur induit une intuition contraire. En effet, le contexte donne l'impression que la vitesse du déplacement du bas de l'échelle est constant lorsque le haut de l'échelle descend de manière constante. Grâce au tableau numérique et aux figures associées que nous pouvons établir, nous pouvons constater que ce n'est pas le cas.

Une échelle de 6 m de haut est posée contre un mur. On écarte son pied du mur à la vitesse constante de 0,5 m par seconde. Le haut de l'échelle descend-il à vitesse constante ?

Ce problème est un problème de vitesses liées analogue à ceux proposés au chapitre VIII.

Plusieurs élèves trouvent le fait étonnant : le haut de l'échelle ne descend pas à vitesse constante mais descend de plus en plus vite, ainsi que le montre clairement la Fig. 93 : à des écarts constants pour le bas de l'échelle correspondent des écarts de plus en plus grands pour le haut de l'échelle.

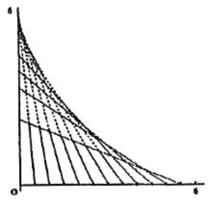


Fig. 93

Soit A le pied de l'échelle, B le haut de l'échelle et O le point de jonction entre le mur et le sol. Si l'on appelle a la distance de O à A et b la distance de O à B, on a, par le théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = 36.$$

Le tableau ci-dessous reprend plusieurs valeurs de a et de b, en fonction du temps t, ainsi que les écarts Δt, Δa et Δb.

t	Δt	a	Δa	b	Δb
0		0		6	
	1		0,5		0,03
1		0,5		5,97	
	1		0,5		0.06
2		1		5,91	
	1		0,5		0,11
3		1,5		5,8	
	1		0,5		0,15
4		2		5,65	
	1		0,5		0,2
5		2,5		5,45	
	1		0,5		0,26
6		3		5,19	
	1		0,5		0,32
7		3,5		4,87	
	1		0,5		0,4
8		4		4,47	
	1		0,5		0,51
9		4,5		3,96	
	1		0,5		0,655
10		5		3,31	
	1		0,5		0,92
11		5,5		2,39	
	1		0,5		2,39
12		6		0	

Ce tableau confirme le fait qu'à des Δt constants correspondent des Δa constants et des Δb qui ne le sont pas. En exprimant b en fonction de t, on trouve

$$b = \sqrt{36 - (0,5t)^2}\ .$$

fonction qui peut se représenter, point par point, par le graphe de la Fig. 94.

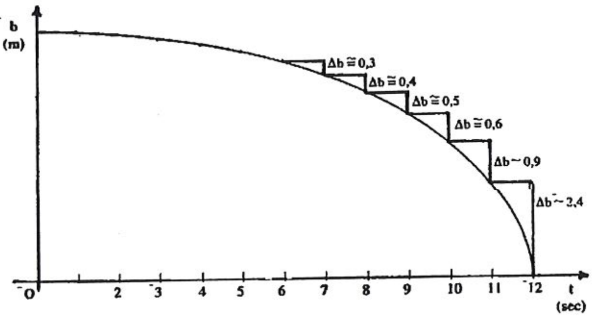


Fig. 94

figure 2.8: Problème 8, issu de Cojerem, 1995

Le problème du vase conique (cfr ci-dessous) induit également une idée de variation d'un débit puisque, comme le vase conique (à cône renversé) s'élargit et que le niveau de l'eau doit monter régulièrement, le débit de la pompe va être de plus en plus grand. Ce problème fait intervenir les notions de dérivée, de débit moyen, de débit instantané et demande la connaissance du volume du cône. Il peut être proposé à des élèves de cinquième secondaire.

Remplissage d'un vase conique

Une pompe alimente un vase conique (Fig. 4.1). Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm^3/min ?

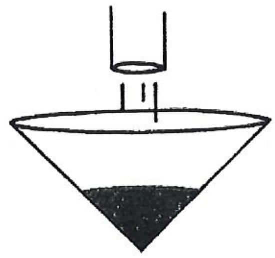


Figure 4.1

figure 2.9: Problème 9, issu du projet du groupe AHA, 1999

De manière générale, les variations les plus facilement perçues sont des variations temporelles. Un élève percevra plus facilement la variation de l'aire d'un disque en fonction du temps dans le problème de l'onde, que la variation de l'aire d'un disque en fonction de son rayon : dans ce dernier cas, il aura plus tendance à voir la formule πr^2 de manière statique sans penser à faire varier le rayon contrairement au premier cas. C'est normal si l'on pense que le temps est une grandeur d'office variable.

Une fois la variation perçue, il faut pouvoir identifier ce qui change et cela pose pas mal de problèmes à certains élèves. Ceux-ci se concentrent notamment sur le comment ça change, ils sont plus concentrés sur l'idée de mouvement d'un point qui décrit la courbe, par exemple, plutôt que sur l'évolution des valeurs des variables x et y.
En effet, lors de la lecture d'un graphique, il faut pouvoir parcourir la courbe et penser en même temps aux variations sur les axes, c'est-à-dire au "comment varie y en fonction de x qui lui-même varie". C'est une difficulté pour les élèves de penser à tout cela en même temps.
C'est justement le troisième obstacle proposé par Anna Sierpinska.

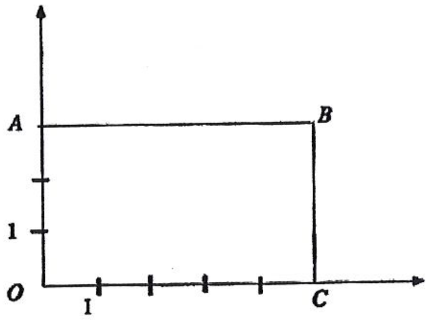
Obstacle 3 : ***Considérer les changements comme un phénomène, se concentrant sur comment les choses changent, en ignorant ce qui change.***

Nous pouvons alors pour essayer de dépasser cet obstacle, donner plusieurs activités aux élèves.
Premièrement, les tableaux numériques rendent très bien la variation et permettent d'identifier ce qui change et comment ça change.
Nous pouvons pour illustrer cela reprendre le problème 2 concernant la consommation d'essence.
En effet, avec les différents essais effectués, nous pouvons voir très clairement ce qui varie et ce qui ne varie pas.

Nous pouvons les faire travailler sur des idées du type : lorsque nous considérons des rectangles de périmètre constant, l'aire est-elle constante également ? On peut observer que plusieurs élèves pensent que oui, persuadés que quand deux grandeurs sont associées à un même objet géométrique, la constance de l'une entraîne d'office la constance de l'autre. Pour cette question, nous pouvons souligner l'enjeu des tableaux numériques.
Les problèmes des rectangles isopérimétriques ou isosuperficiels (cfr problèmes 10 et 11) sont justement dans cette optique. Ils apportent un complément intéressant aux problèmes de mouvement ou à d'autres problèmes qui mobilisent une fonction dont la variable indépendante est le temps comme le problème 12 qui concerne la taille d'un enfant.

Famille des rectangles de même périmètre

Sur le diagramme ci-dessous dessinez plusieurs rectangles qui ont le même périmètre que le rectangle $ABCO$. Pour chaque rectangle, trois sommets doivent appartenir aux axes.



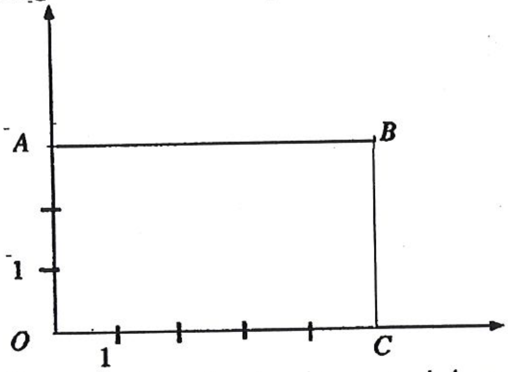
a) S'agit-il de rectangles semblables ? Pourquoi ?

b) On veut étudier la dépendance entre la base et la hauteur de tous ces rectangles. A l'aide de quel diagramme cette dépendance est-elle représentée ?
c) Quelle est la formule qui exprime la hauteur en fonction de la base ?
d) Est-ce que l'aire des rectangles ayant un même périmètre est constante ?

figure 2.10: Problème 10, issu de De question en question 2, 1994

Famille des rectangles de même aire

Sur le diagramme ci-dessous dessinez plusieurs rectangles qui ont la même aire que le rectangle $ABCO$. Pour chaque rectangle, trois sommets doivent appartenir aux axes.



b) On veut étudier la dépendance entre la base et la hauteur de tous ces rectangles. A l'aide de quel diagramme cette dépendance est-elle représentée ?
c) Quelle est la formule qui exprime la hauteur en fonction de la base ?
d) Est-ce que le périmètre des rectangles ayant une même aire est constant ?

figure 2.11: Problème 11, issu de De question en question 2, 1994

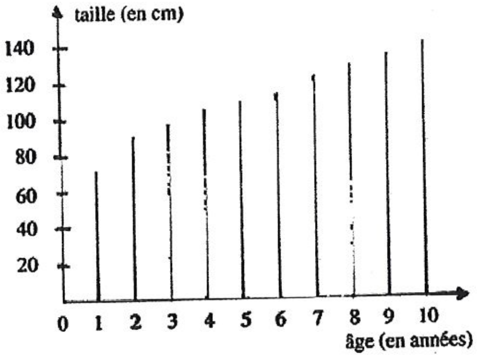
Taille d'un enfant

La taille d'un enfant varie en fonction de son âge. Le tableau 2 montre l'évolution de la taille d'un enfant d'année en année, depuis sa naissance jusqu'à dix ans :

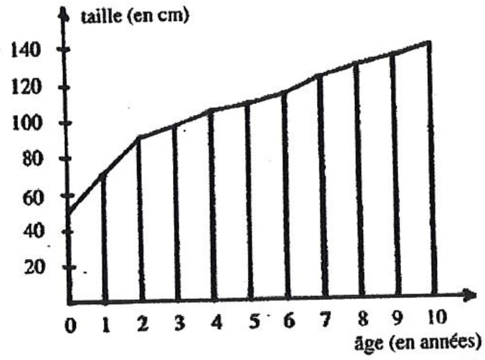
âge (en année)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
taille (en cm)	52	76	88	96	104	110	116	121	128		140

Tableau 2

A la figure 3a, les données du tableau 2 sont représentées par un diagramme. Celui-ci est obtenu en indiquant les âges sur l'axe horizontal et les tailles sur l'axe vertical. Ensuite, pour chaque âge on dessine un segment représentant la taille de l'enfant.



a)



b)

Figure 3

figure 2.12: Problème 12, issu du Référentiel de mathématiques, 2002

L'exemple des rectangles isopérimétriques se prête très bien à l'introduction des termes de variable et de constante. En effet, on peut très bien identifier que ce sont les dimensions et l'aire qui changent et que le périmètre est constant.

On peut imaginer que cette difficulté à percevoir une variation et ce qui change pousse les élèves à résoudre les problèmes en termes d'équations et d'inconnues là où on pourrait travailler en termes de fonctions et de variables. C'est l'obstacle 4 que mentionne Anna Sierpinska.

Obstacle 4 : *Penser en termes d'équations et d'inconnues.*

Dans leur cursus, les élèves ont d'abord appris à manier, à différencier les quantités connues et inconnues et à les mettre en équation. Les habitudes sont alors difficiles à modifier lorsqu'il s'agit de leur faire comprendre la distinction entre les grandeurs variables et les grandeurs constantes.

Dans beaucoup de problèmes qui se résolvent via des fonctions, les élèves font des équations et peu songent à travailler graphiquement. Le problème des photocopies (cfr problème 13 ci-dessous) est un de ces problèmes que les élèves résolvent via des équations et non en termes de fonctions par le graphique. Ce problème peut-être traité en troisième secondaire puisqu'il fait intervenir des fonctions du premier degré.

Un enseignant veut photocopier un syllabus pour ses élèves. À l'école, on lui demande 300 F par syllabus. Dans une papeterie, on lui propose un tarif dégressif :

450 F par exemplaire pour les dix premiers,
325 F par exemplaire pour les vingt suivants,
250 F par exemplaire au-delà du trentième.

a) Que coûtera respectivement à l'école, à la papeterie, l'impression de 8 syllabus, 27 syllabus et 45 syllabus, et n'importe quel nombre de syllabus ?
Dans chacun des cas ci-dessus précisez la proposition la plus intéressante.

b) Si l'enseignant dispose d'une somme de 9 000 F, combien de syllabus peut-il photocopier à l'école, à la papeterie ?

c) Pour combien d'exemplaires paiera-t-il le même prix à l'école qu'à la papeterie ?

figure 2.13: Problème 13, issu de De question en question 3, 1996

Comment interpréter cela ?
Cet obstacle pourrait peut-être venir aussi du choix d'une même notation x qui est employée pour désigner à la fois variables et inconnues. Mais variables et inconnues ont trait à deux modes de pensée différents. Les mots variables et constantes sont utilisés dans la pensée fonctionnelle. En effet, pour une fonction, x désigne la variable indépendante. Par contre, les notions de quantités connues et inconnues ont trait à la pensée algébrique.

Une fois la notion de variable établie, deux autres notions en aval de celle-ci peuvent être introduites : celle de variable dépendante et celle de variable indépendante. Anna Sierpinska mentionne à ce propos l'obstacle suivant.

Obstacle 5 : ***Considérer l'ordre des variables comme sans intérêt.***

Dans chacun des problèmes (10, 11 et 12) mentionnés ci-dessus, et notamment en dressant des tableaux numériques, les élèves peuvent percevoir le fait qu'une variable varie en fonction d'une autre. Mais, de ce point de vue, on peut contraster les problèmes 10 et 11 du problème 12 dans le sens suivant. Quand le temps est impliqué, il prend plus facilement le rôle de variable indépendante parce que s'il y a bien une variable qui varie librement sans qu'on doive s'en occuper, c'est le temps. C'est le cas du problème de la taille d'un enfant en fonction de son âge. Mais dans le cas des autres problèmes, exprimer la hauteur d'un rectangle en fonction de sa base ou la base en fonction de la hauteur, peut plus apparaître comme un choix tout à fait arbitraire.

On peut alors à ce moment introduire les notions de variables dépendantes et indépendantes. La variable dépendante étant celle qui varie en fonction de l'autre et la variable indépendante est celle qui varie librement.
Ces notions peuvent également être présentées lors du traitement de la proportionnalité de deux grandeurs, l'une pouvant être considérée comme indépendante et l'autre dépendante. Par exemple, la proportionnalité entre la base et la hauteur d'une famille de rectangles (cfr exemple 14 ci-dessous).

Une fonction de proportionnalité

Reprenons le cas de la famille de rectangles dont le rapport de la hauteur à la base est constant (section 1.2.1).
Considérons la base comme grandeur indépendante et la hauteur comme grandeur dépendante.
La dépendance de la hauteur en fonction de la base est un exemple de fonction correspondant à la proportionnalité de deux grandeurs. La formule s'écrit

$$h = \frac{3}{2}b. \qquad (1)$$

Son diagramme est représenté à la figure 6a et son graphique est représenté à la figure 6b.

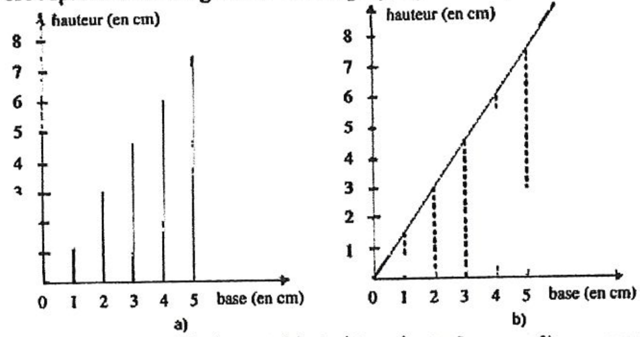


Figure 6

On observe que, dans la formule (1), la variable indépendante b apparaît au premier degré et que le graphique est une droite qui passe par l'origine.

Une dépendance entre deux grandeurs proportionnelles dont l'une est considérée comme grandeur indépendante et l'autre comme grandeur dépendante s'appelle une *fonction de proportionnalité* ou une *fonction linéaire*.

figure 2.14: Problème 14, issu du Référentiel de mathématiques, 2002

Mais, le statut des variables va de pair avec le statut des axes. On choisit de représenter la variable indépendante sur l'axe horizontal, axe des abscisses et la variable dépendante sur l'axe vertical, axe des ordonnées. Mais, dans certains cas, les élèves rompent cette habitude. La façon de résoudre le problème 15 ci-dessous concernant la croissance d'une population de bactéries en est l'illustration. C'est un problème qui peut être présenté pour introduire l'étude des fonctions exponentielles. Certains élèves, pour représenter cette fonction, mettent la variable temps en ordonnée. Ils bouleversent donc le statut conféré aux axes.

Toutes les demi-heures, tous les quarts d'heures,. . .

Lorsqu'une une population de bactéries dispose de conditions favorables à son développement, on peut supposer qu'elle augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Prenons l'exemple d'une telle population de bactéries qui double d'heure en heure. Notons P_0 le nombre de bactéries (en millions) au temps $t = 0$ et $P(t)$, le nombre de bactéries au temps t (mesuré en heures). Ainsi, $P_0 = P(0)$.

1. Dans ces conditions, est-il possible que sur chaque intervalle d'une demi-heure cette population croisse de la moitié de son effectif au début de cet intervalle de temps ? Si oui, pourquoi ? Si non, dans quel rapport augmenterait-elle de demi-heure en demi-heure ?
2. Dans quel rapport augmente-t-elle de quart d'heure en quart d'heure ? Tous les $k^{ièmes}$ d'heure ?

figure 2.15: Problème 15, issu du projet du groupe AHA, 1999

Le statut des variables peut être travaillé en posant des questions du type : quand le rayon augmente, comment varie l'aire d'un cercle en fonction du rayon ?

Nous avons retrouvé dans un manuel d'exercices des problèmes (cfr problème 16) pour lesquels l'idée de variable dépendante et de variable indépendante est implicite. Les élèves considèrent alors que ce qui est à gauche est premier par rapport à ce qui est à droite.

1) Écris une formule qui relie :
   a) le poids d'une marchandise et son prix, si 1 kg de cette marchandise coûte 16 F;
   b) idem, mais on doit compter un supplément fixe de 30 F pour le port et l'emballage:
   c) le nombre d'ouvriers et le temps pour effectuer un travail, si on estime qu'un ouvrier fait ce travail en 12 jours et que n ouvriers le font en n fois moins de temps;
   d) la vitesse moyenne d'une voiture et la distance qu'elle parcourt pendant trois heures:
   e) le rayon d'un cercle et la longueur de sa circonférence;
   f) le rayon d'un cercle et son aire;
   g) l'aire d'un cercle et son rayon;
   h) le poids suspendu à un ressort et la longueur de ce ressort, si sa longueur à vide est 20 cm et que sa longueur est de 30 cm, si on y suspend un poids de 1 kg.

2) Décris chacune de ces correspondances par un graphique.

figure 2.16: Problème 16, issu de Espace math 3, 1996

La distinction entre ces deux types de variables est très importante. La confusion pourrait amener les élèves à considérer un graphique comme pouvant être celui d'une fonction et de sa réciproque. Par exemple, pour certains, la fonction $y = x^2$ a le même graphique que la fonction $x = y^2$.
Soulignons à ce propos que les équations de courbes en géométrie analytique jouent un rôle particulier dans l'apprentissage du concept de fonction. D'abord, elles font travailler l'idée que le graphique d'une fonction est un lieu de points dont les coordonnées x et y satisfont une contrainte qui prend la forme d'une équation. Mais, ce travail ne conduit pas l'élève à bien distinguer le statut de x et celui de y. Par exemple, dans l'équation d'un cercle, $x^2 + y^2 = R^2$, on attribue aucun statut particulier à x ou à y, sauf lorsqu'on fera de cette courbe l'ensemble des graphiques de deux fonctions $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ et $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

2.3 Grandeurs ou nombres

Voici les deux obstacles qu'Anna Sierpinska soulève concernant les notions de grandeur et de nombre.

Obstacle 6 : ***Une conception hétérogène du nombre : nombre discret et grandeur continue.***

Obstacle 7 : ***Un philosophie pythagoricienne du nombre : tout est nombre.***

Selon elle, il y a une distinction à faire entre les variables qui correspondent aux grandeurs et les variables qui correspondent aux nombres selon le contexte.
En physique, par exemple, on parle de grandeurs comme le temps, la vitesse ou encore la position. Mais, dans le domaine mathématique, nous parlons de fonctions et variables numériques et donc de nombres.

Dans l'Antiquité, ces deux domaines étaient très différenciés. Le rapport, par exemple, était un rapport de deux grandeurs homogènes mais n'était pas considéré comme un nombre. On était plus tourné vers les grandeurs que vers les nombres. Les nombres étaient représentés de manière géométrique par des segments. C'est plus tard, que la notion du nombre s'est construite.

Dans l'enseignement actuel, les grandeurs sont pratiquement absentes et on a tendance à faire travailler les élèves uniquement dans le domaine des nombres. Beaucoup d'élèves ne savent pas que les fonctions numériques peuvent représenter une dépendance entre deux grandeurs. Nous pourrions remédier à cela en travaillant avec des grandeurs comme c'est le cas dans les problèmes 17 et 18 ci-dessous -et dans d'autres problèmes antérieurs- qui pourraient être présentés aux élèves. Le premier fait intervenir les fonctions du second degré, tandis que le second mobilise les concepts de vitesse moyenne et de vitesse instantanée.

a) Un objet est lâché d'une hauteur de 125 m au temps $t = 0$. Quelle est la fonction qui donne sa hauteur en fonction du temps ? Tracez la courbe représentant cette fonction $h(t)$.

b) Appelons $g(t)$ la hauteur en fonction du temps d'un autre objet lancé en même temps mais d'une hauteur de 75 m. Comment seront les deux courbes ? Exprimez $g(t)$ en fonction de $h(t)$.

c) Refaites la même chose pour $k(t)$, hauteur d'un troisième objet lâché de 125 m mais trois secondes plus tard.

d) Que devient $h(t)$ si le premier objet est lâché sur la lune (où l'accélération due à la pesanteur est six fois moins grande) ?

e) Exprimez dans chaque cas par des phrases le lien entre la transformation de l'expression analytique et celle de la courbe.

figure 2.17: Problème 17, issu du projet du groupe AHA, 1999

Distance de freinage d'une voiture

Une voiture roule à la vitesse v_0. Brusquement, elle se met à freiner (accélération négative constante que nous noterons $-a$) jusqu'à l'arrêt. Quelle distance aurait-elle parcouru si, pendant tout le temps qu'elle a freiné, elle avait au contraire maintenu sa vitesse initiale v_0 ?

Choisissons l'origine du temps au moment où la voiture se met à freiner. D'après la formule du mouvement uniformément accéléré, sa position est donnée par

$$y(t) = v_0 t - \frac{a}{2} t^2. \tag{4.10}$$

Sa vitesse moyenne entre deux instants t et $t + \Delta t$ (avec $\Delta t \neq 0$) est

$$\begin{aligned} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} &= \frac{v_0(t+\Delta t) - \left(\frac{a}{2}\right)(t+\Delta t)^2 - v_0 t + \left(\frac{a}{2}\right) t^2}{\Delta t} \\ &= \frac{v_0 \Delta t - at\Delta t - \left(\frac{a}{2}\right)(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= v_0 - at - \frac{a}{2}\Delta t. \end{aligned}$$

Sa vitesse (instantanée) au temps t est

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \quad v_0 - at - \frac{a}{2}\Delta t \\ &= v_0 - at. \end{aligned} \tag{4.11}$$

figure 2.18: Problème 18, issu du projet du groupe AHA, 1999

Et, ils en arrivent également à penser que les fonctions mathématiques n'ont rien en commun avec les lois physiques. Cela constitue l'obstacle 8 qui est souligné par Anna Sierpinska.

Obstacle 8 : ***Les lois de la physique et les fonctions mathématiques n'ont rien en commun, elles appartiennent à des domaines de pensée différents.***

Il est vrai que les variables x et y qui sont présentes dans une fonction mathématique représentent des nombres mais, dans certains contextes, elles peuvent représenter des grandeurs.

Quoi qu'il en soit, il faut montrer aux élèves que les fonctions mathématiques sont des outils qui permettent de modéliser des lois. Par exemple en physique, elles sont des outils qui permettent de représenter la dépendance entre deux grandeurs (cfr problèmes 17 et 18).

De plus, la dépendance entre deux grandeurs peut être traduite en termes de fonction numérique.

C'est par exemple le cas pour le problème de la variation de la base en fonction de la hauteur pour des rectangles de même périmètre, qui est mis sous la forme d'une fonction.
Deux grandeurs peuvent également dépendre l'une de l'autre dans des contextes différents mais selon la même loi.
Pour le montrer, reprenons la formule $h = \frac{2}{3}b$, qui représente la dépendance entre la hauteur et la base d'une famille de rectangles, et la formule $d = \frac{2}{3}t$ qui désigne la dépendance entre la distance et le temps quand une particule se déplace à une vitesse constante valant 2/3 d'unités. Dans ces deux dépendances, le même calcul permet d'obtenir une valeur pour la variable dépendante à partir d'une valeur conférée à la variable indépendante (multiplication par $\frac{2}{3}$). En notant x la variable indépendante et y la variable dépendante, la fonction $y = \frac{2}{3}x$ représente ces deux formules indépendamment des grandeurs concernées.

Quoi qu'il en soit, faute d'avoir travaillé avec des grandeurs dans les fonctions, les élèves en arrivent à ne plus reconnaître les fonctions qui sont derrière les lois physiques. Par exemple, certains ne voient pas que la loi $s = \frac{1}{2}gt^2$ est une fonction du second degré par rapport au temps.

Dans cette optique, il est significatif que les professeurs ne distinguent pas domaine de validité physique et domaine de définition en mathématiques. Prenons, par exemple, le problème du toit mobilisant une fonction homographique (cfr problème 19). Lors de l'établissement des résultats, il faut repenser aux grandeurs qui sont désignées dans notre problème et que celui-ci n'a pas de sens pour des valeurs de la variable x plus petites que 2. Les valeurs $x < 2$ n'ont pas de sens du point de vue de la validité physique, mais ont un sens du point de vue du domaine de définition en mathématique.

Un toit en surplomb

Un toit en pente s'appuie sur les murs MN et AB (figure 2.21). Ceux-ci sont hauts de 3 m et écartés l'un de l'autre de 4 m. Le toit peut être plus ou moins incliné. Comment varie la hauteur h du faîte lorsque la distance x s'approche de 2 m ?

Comment varie h lorsque x devient de plus en plus grand ?

Comment se traduisent sur le graphique de h en fonction de x les observations précédentes ?

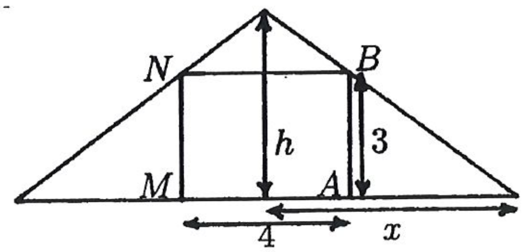


Figure 2.21

figure 2.19: Problème 19, issu du projet du groupe AHA, 1999

En proposant aux élèves des problèmes qui font, par exemple, intervenir des grandeurs physiques, on les amène ainsi à réfléchir sur le sens des relations qui sont ainsi établies. Par exemple si dans un problème la lettre d désigne la distance, dans l'établissement des résultats, il faut penser que si d a une valeur négative, on doit la rejeter, car de nouveau cela n'a pas de sens du point de vue de la validité physique.

2.4 La proportion, une relation privilègiée

Obstacle 9 : ***La proportion est un type de relation privilégiée.***

Selon Anna Sierpinska, le fait de considérer la proportion comme un type de relation privilégiée, comme une relation que l'on recherche partout et dans toutes les théories, peut constituer un obstacle.

La proportion est une notion qui est travaillée très tôt, dès la première secondaire. A ce niveau, les élèves sont capables de reconnaître si une grandeur

est proportionnelle à une autre. Cette proportion est généralement travaillée à l'aide de tableaux appelés tableaux de proportionnalité.
Les élèves sont souvent amenés à tracer le graphique de la proportionnalité d'une variable par rapport à une autre. Ils peuvent alors constater qu'ils obtiennent une droite, c'est-à-dire que les points sont alignés. Ils peuvent alors se servir de cet alignement pour extrapoler d'autres valeurs.
Nous pouvons donner en exemple, le problème de la variation de la hauteur en fonction de la base pour une famille de rectangles (cfr problème 14) mais aussi des problèmes comme le problème de proportionnalité 20 (ci-dessous), qui peut être présenté à des élèves de première secondaire.

Proportionnalité

On sait que le prix d'une marchandise est *proportionnel* à son poids, que lorsqu'on roule à 60 km/heure, la distance est proportionnelle au temps mais par contre, que la taille d'un individu n'est pas proportionnelle à son âge. A quoi reconnaît-on exactement une situation de proportionnalité d'une autre ? Comment résoudre un problème dans une situation de proportionnalité ? C'est ce que nous allons examiner.

Parmi les trois situations suivantes, quelles sont celles qui sont des proportionnalités ? Justifier.

1) Quelqu'un roule à bicyclette, compte le nombre de tours de roue et mesure les distances parcourues. Il obtient le tableau

nombre de tours de roue	5	10	23	30
distance parcourue en mètres	11	22	50,6	66

Tab.6

2) Jean court le 100 mètres en 13 secondes et le 200 mètres en 25 secondes.
3) Dans une station service, j'ai payé 900 F pour 30 litres d'essence . Le lendemain, je prends 45 litres d'essence pour 1 305 F dans une autre station.

figure 2.20: Problème 20, issu de de question en question 1, 1996

Nous rejoignons Anna Sierpinska dans le sens suivant : à force de travailler de manière intensive les tableaux de proportionnalité, certains élèves pensent que les tableaux qui n'ont pas les caractéristiques d'un tableau de proportionnalité ne peuvent pas être des fonctions. Ils en ont tellement fait qu'ils considèrent que tout doit être de cette forme. C'est pour cette raison qu'il faut de temps en temps introduire, dans les exemples donnés, des tableaux qui ne sont pas des tableaux de proportionnalité en leur montrant que cela n'empêche pas d'avoir une fonction.

Il n'empêche que cette polarisation sur la proportionnalité est aussi un marche-pied vers la perception d'autres fonctions. Ainsi voit-on, comme dans le problème de la distance d'arrêt (cfr problème 21 ci-dessous), des élèves chercher une proportion entre une variable et le carré d'une autre ou le cube d'une autre, ..., lorsqu'ils constatent qu'il n'y a pas proportionnalité pure et simple entre ces deux variables.

Distance d'arrêt

La distance d'arrêt d'un véhicule est la somme de deux distances :
- la distance de réaction : c'est la distance parcourue entre l'instant où le conducteur aperçoit l'obstacle et celui où il se met à freiner ;
- la distance de freinage : distance parcourue entre le moment où le conducteur commence à freiner et le moment où le véhicule s'immobilise.

Le tableau ci-dessous donne, pour différentes vitesses, les distances de réaction, les distances de freinage (sur le sol sec) et les distances d'arrêt.

a) Quelle serait la distance de réaction (en mètres) pour une vitesse de 60 km/h ?
b) Quelle serait la distance de freinage pour la même vitesse ?
c) quelle serait la distance d'arrêt pour cette vitesse ?

Vitesse v (en km/h)	Distance de réaction d_r (en m)	Distance de freinage d_f (en m)	Distances d'arrêt d_a (en m)
30	9	4,5	13,5
50	15	12,5	27,5
70	21	24,5	45,5
90	27	40,5	67,5
120	36	72	108

figure 2.21: Problème 21, issu de De question en question 3, 1996

2.5 Les différentes représentations d'une fonction

On sait qu'une fonction peut être représentée dans divers registres : le numérique par les tableaux, l'algébrique par la représentaion analytique et le graphique. Il peut arriver qu'un de ces registres soit tellement prégnant dans les têtes des élèves qu'il fait écran aux autres, comme nous allons le voir. Par ailleurs, chacun de ces registres a sa difficulté propre.

2.5.1 L'expression analytique-Enchantement par l'algèbre

Anna Sierpinska relève deux obstacles qui viennent du fait que certains élèves assimilent la fonction à l'outil algébrique qui la représente.

Obstacle 10 : ***La croyance forte dans le pouvoir des opérations formelles sur les expressions algébriques.***

Obstacle 11 : ***Seules les relations descriptibles par des formules analytiques sont dignes de recevoir le nom de fonction.***

Pour Euler (18ème siècle) et Bernouilli (17 et 18ème siècles), une fonction est une relation descriptible par une expression analytique, une relation algébrique. Voici la définition qu'ils en donnent : "Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée de n'importe quelle manière de cette même quantité et de nombres ou de constantes".

En identifiant la fonction à son expression analytique, comme ces deux mathématiciens, certains élèves n'appellent pas fonction, un tableau numérique ou un graphique pour lequel ils ne parviennent pas à trouver une expression analytique, ou encore, comme dans le problème des impôts (cfr problème 4) et comme dit plus haut, les élèves ne considèrent pas une fonction, donnée par le graphique, mais plusieurs fonctions car ils observent non seulement plusieurs morceaux de droites, mais aussi plusieurs expressions analytiques associées.

Par contre, comme le souligne Anna Sierpinska, le manque de conscience algébrique rend également difficile la compréhension du concept de fonction. A ce sujet, nous distinguons deux choses. La première est que l'élève maîtrise le côté algébrique lorsqu'il est capable d'exprimer une grandeur en fonction d'une autre, lorsqu'il est capable de donner l'expression de la dépendance. Et deuxièmement, il y a la maîtrise, la manipulation de la notation et de ce qu'elle représente .
Certains élèves ont des difficultés à saisir le sens d'expressions telles que : $y = f(x)$, $y = f(x+t)$. Et la notation $f(x)$ peut perturber certains, car elle désigne la fonction elle-même mais aussi la valeur de la fonction en x.
De plus, lorsque nous utilisons la calculatrice, par exemple pour les fonctions de second degré, s'affiche toujours $y = ax^2 + bx + c$ et donc pas de trace de $f(x)$.
Un indice de cette incompréhension de la notation est visible lorsque les élèves écrivent : $f(x+1) = f(x)+f(1)$. Ils ont tendance à linéariser et ont également des difficultés à considérer l'expression dans sa globalité. Par exemple, certains écrivent : $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3+6x^2+3$ alors que $f(x) = x^3+6x^2+3$.

Certains ont également des difficultés à saisir le sens d'expressions telles que $y = ax$ et à différencier les rôles du paramètre a et des variables x et y. Nous avons observé cette non-différenciation au cours de notre expérience dans les classes lors de l'exploration de l'identité graphique de certaines classes de fonctions. Par exemple, pour prouver que le point $(0, c)$ appartient à la courbe $y = ax^2 + bx + c$, certains élèves remplaçaient a et b par 0, au lieu de remplacer x par 0.

Ces obstacles concernant le rôle de l'algèbre peuvent être levés si nous faisons travailler les élèves sur les différentes manières de représenter une fonction.
Il s'agit d'inciter les élèves à utiliser les différentes représentations, à savoir

les graphiques, les tableaux numériques et les expressions analytiques, de les faire jongler avec celles-ci, de pouvoir passer de l'une à l'autre sans difficulté. On peut, en tant qu'enseignant, leur proposer de trouver des fonctions dans chacun de ces trois registres comme c'est le cas pour les activités 3 (concernant les impôts), 22 (concernant l'éclairement d'une surface) et 23 (concernant les circuits automobiles). Mais, nous pouvons aussi leur proposer des activités qui permettent de passer d'une représentation à l'autre comme c'est le cas dans l'exercice 24 pour le domaine des fonctions homographiques.
D'ailleurs, dans les programmes actuels, on insiste très fort sur le triptyque TGF (tableau, graphique, formule). C'est un slogan qui est omniprésent même en formation continuée.
L'intérêt de ces activités par rapport aux obstacles précités, est de ne pas se cantonner au registre algébrique et à la démarche classique : passer de l'expression analytique au graphique associé.

L'éclairement d'une surface

Considérons une ampoule de 100 W (watts) et supposons qu'elle envoie sa puissance lumineuse de la même façon dans toutes les directions. C'est là une hypothèse simplificatrice, car par exemple l'ampoule n'envoie pas de lumière du côté de son culot. Nous nous tiendrons néanmoins à cette hypothèse pour pouvoir estimer la puissance que reçoit une surface à une certaine distance de la lampe.

> Soit une sphère dont l'ampoule occupe le centre. Chaque cm^2 de la sphère reçoit une certaine puissance (la puissance reçue par unité d'aire s'appelle l'éclairement de la surface). Comment l'éclairement varie-t-il avec le rayon de la sphère ? Que se passe-t-il si on remplace l'ampoule de 100 W par une de 75 W, de 50 W ?

Puisque notre ampoule «théorique» rayonne de la même façon dans toutes les directions, l'éclairement E de la sphère sera donné par la puissance de l'ampoule (100 W) divisée par la surface de la sphère, soit en W/cm^2,

$$E = \frac{100}{4\pi r^2} \simeq \frac{7{,}96}{r^2}.$$

Par exemple, à trois mètres de la lampe,

$$E = \frac{7{,}96}{(300)^2} = 0.000088. .$$

Si on double le rayon de la sphère, l'éclairement est divisé par 4. La figure 2.9 illustre ce résultat. Plus r augmente, plus le graphique s'approche de l'axe horizontal. Par contre, plus r s'approche de 0, plus le graphique monte sans avoir de valeur maximale. Les axes du repère sont des *asymptotes* au graphique.

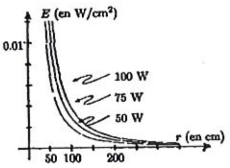


Figure 2.9

La figure 2.9 montre aussi l'éclairement dans le cas des ampoules de 75W et 50W, pour lesquelles on a respectivement

$$E = \frac{75}{4\pi r^2} \text{ et } E = \frac{50}{4\pi r^2}.$$

L'éclairement est directement proportionnel à la puissance de l'ampoule.
Pour être plus conformes à la réalité, nos résultats devraient encore tenir compte du fait qu'une ampoule rayonne seulement une partie de sa puissance sous forme de lumière. Elle en dissipe aussi une partie en chaleur.

figure 2.22: Problème 22, issu du projet du groupe AHA, 1999

Circuits automobiles

La figure 2.5 représente quelques circuits (imaginaires) de Formule 1 et quelques graphiques donnant la vitesse d'une voiture en fonction du temps le long de ces circuits. Le temps 0 correspond dans chaque cas au moment où la voiture passe devant les tribunes T. Associez les circuits et les graphiques de vitesse.

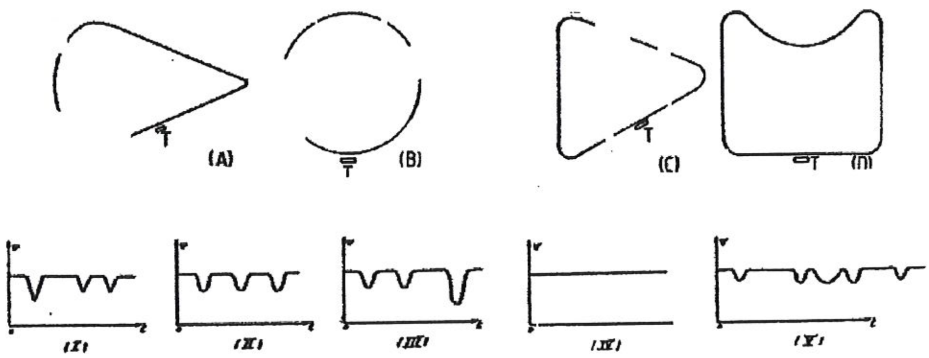


Figure 2.5

figure 2.23: Problème 23, issu du projet du groupe AHA, 1999

En partant de la fonction $\frac{1}{x}$ et par transformations de graphiques, créez une fonction dont le graphique ait un comportement semblable à celui qui est esquissé sur la figure 2.26.

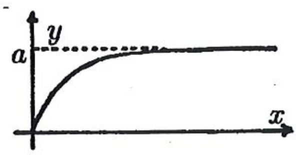


Figure 2.26

figure 2.24: Problème 24, issu du projet du groupe AHA, 1999

Dans cette optique, le travail que nous avons proposé dans les classes de quatrième et de cinquième secondaire sur les classes de fonctions et sur leur identité graphique permettrait de jongler avec ces trois représentations possibles, sans se braquer uniquement sur l'algèbre et l'expression analytique. En outre, le problème qui peut exister concernant le rôle des paramètres peut être réglé grâce à cette étude.

2.5.2 Les tableaux numériques

Anna Sierpinska évoque l'obstacle suivant.

Obstacle 12 : ***Les fonctions sont des suites de valeurs.***

La construction des tableaux numériques nécessite de prendre plusieurs valeurs pour x et de lui associer les valeurs correspondantes $f(x)$. En fonction de cela, les élèves peuvent être amenés à croire que les fonctions sont des suites de valeurs. En effet, les valeurs d'un tableau permettent de dégager une certaine régularité, et celle-ci est étendue à toutes les valeurs intermédiaires. Mais, nous avons des difficultés à interpréter cet obstacle et cela ne nous permet pas de nous prononcer à ce sujet.

2.5.3 Le graphique d'une fonction

En ce qui concerne le graphique d'une fonction, Anna Sierpinska relève l'obstacle suivant.

Obstacle 13 : ***Les coordonnées d'un point sont des segments et pas des nombres.***

Quant à nous, nous avons plutôt observé l'obstacle opposé : les coordonnées ne sont considérées que comme des nombres et pas comme des longueurs de segments. Cela peut notamment poser problème lors de transformations de courbes telles que l'étirement. Un exemple qui illustre cela apparaît dans l'expérience que nous avons eue dans les classes. Nous demandions aux élèves de retrouver la transformation subie par la courbe $y = x^2$ quand on passe à la courbe $y = 3x^2$. Cette question a posé quelques difficultés à plusieurs élèves. Or, si on pense que l'ordonnée d'un point représente aussi un segment, on voit bien que les longueurs des segments correspondants aux ordonnées sont multipliées par trois.

Si les élèves assimilent la fonction à son graphique, ils ne prendront pas l'ordonnée $f(x)$ comme pouvant être la longueur d'un segment et ne tiendront pas compte du fait que le graphe représente l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'expression analytique.
Lorsque les élèves doivent percevoir une ordonnée positive $f(x)$ comme la longueur d'un segment, cela pose des problèmes non négligeables. Nous pouvons

illustrer cela par l'exemple 25 concernant le volume d'un solide de révolution. Les élèves ne parviennent pas à trouver la fonction-intégrand qui conduit au volume d'un solide de révolution. Ils devraient pouvoir indentifier le rayon du disque en l'abscisse x à $f(x)$. Mais, ils n'y pensent pas. Tout comme ils ne pensent pas non plus qu'une courbe est la représentation d'un ensemble de segments dont on a pris les extémités supérieures, comme c'est le cas du problème 12 concernant la taille d'un enfant.

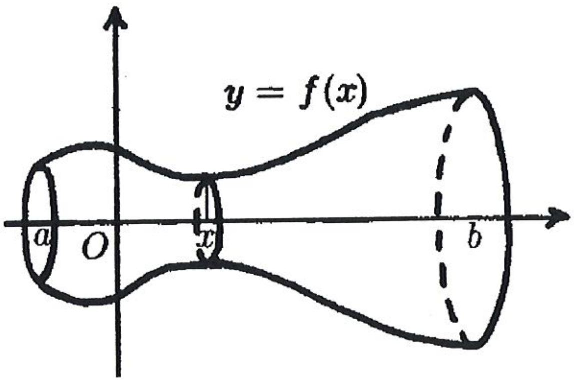


figure 2.25: Problème 25, issu du projet du groupe AHA, 1999

Pour inciter les élèves à penser que l'ordonnée est aussi un segment, nous pouvons les faire travailler sur la sommation graphique. Il est alors nécessaire dans ce cas de considérer les segments pour les reporter et les additionner. Nous pouvons, par exemple, leur demander de sommer graphiquement les fonctions $y = x$ et $y = \frac{1}{x}$ comme le propose le problème 26.

Une balance défectueuse [1]

> Un marchand de légumes octogénaire utilise encore une balance à plateaux. Celle-ci, malheureusement, n'a pas les deux bras égaux. Par souci d'honnêteté, le marchand propose de peser la marchandise une fois à gauche puis une fois à droite et de faire ensuite la moyenne des deux pesées. Le défaut est-il ainsi corrigé ? Sinon, à qui profite la manoeuvre ?
>
> (Indication : *P étant le poids réel, étudier le poids facturé en fonction du rapport des longueurs des bras de la balance*).

[1] Cet énoncé peut, à volonté, être remplacé par un autre plus simple, à savoir : *dessinez le graphique de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ à partir des graphiques de x et $\frac{1}{x}$. Décrivez le comportement de $f(x)$.*

Le lecteur qui aura choisi cette question en trouvera la réponse incorporée au texte qui suit. Il devra alors sauter ce qui concerne la balance.

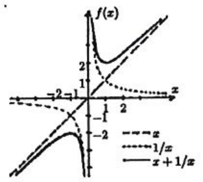


Figure 2.31

D'abord on rend $\frac{1}{x}$ aussi petit qu'on veut en prenant x assez grand, auquel cas $x+\frac{1}{x}$ est aussi proche qu'on veut de x ou la différence $f(x)-x$ aussi petite qu'on veut. Ceci peut s'écrire

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

La fonction $f(x)=x+\frac{1}{x}$ se comporte pratiquement (c'est-à-dire à peu de chose près) comme la droite $y=x$ pour x très grand. La droite $y=x$ est un exemple de ce qu'on appelle une *asymptote oblique à droite* de $f(x)$.
Par ailleurs $f(x)$ est impaire. En effet

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-(x+\frac{1}{x})=-f(x).$$

Donc le graphique de $f(x)$ va également se rapprocher autant qu'on veut de $y=x$ pour des valeurs de x négatives assez grandes en valeur absolue. La droite $y=x$ est une *asymptote oblique à gauche* de $f(x)$.
Voyons maintenant ce qui se passe pour x proche de 0. Le graphique de $f(x)=x+\frac{1}{x}$ est alors aussi proche qu'on veut de celui de $\frac{1}{x}$ pour autant qu'on choisisse des valeurs de x positives suffisamment proches de 0.
Comme, pour $x>0$,

$$x+\frac{1}{x}>\frac{1}{x},$$

on a, dans les notations qui commencent à être familières,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

puisque

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty.$$

figure 2.26: Problème 26, issu du projet du groupe AHA, 1999

Soulignons que les premières fonctions, dans l'histoire des mathématiques étaient dessinées à l'aide de segments. Et, actuellement, cette représentation est travaillée dans le traitement numérique des données, en probabilités où les diagrammmes sont constitués de bâtonnets.

Dans l'étude des fonctions, une distinction est à faire entre graphe et graphique de celles-ci.
Le graphique est la représentation de la fonction dans un système d'axes tandis que le graphe, c'est l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient l'expression analytique donnée de la courbe.

Anna Sierpinska mentionne l'obstacle suivant relatif au graphe d'une fonction.

Obstacle 14 : ***Le graphe d'une fonction est un modèle géométrique de relation fonctionnelle. Il n'a pas besoin d'être fidèle, il peut contenir des points (x, y) tels que la fonction n'est pas définie en x.***

Certains élèves n'essayent pas de donner un sens à la courbe dessinée et se contentent de considérer son allure pour classer les fonctions. C'est l'allure globale du graphique qui leur saute aux yeux et l'expression analytique n'est alors que le nom qu'on peut donner à la courbe.
Nous avons pu constater cela au cours de notre expérience. A l'aide de la calculatrice, il suffit de programmer l'expression analytique et directement un graphique est affiché à l'écran. L'expression analytique n'est plus alors considérée comme la relation qui lie les points du graphique. Et dans ce cas, les élèves ont des difficultés à remplacer x par 0 et y par c dans l'expression $y = ax^2 + bx + c$ pour montrer que le point $(0, c)$ appartient à la courbe.

Pour changer cette perception qui réduit la fonction à son graphique, on peut montrer aux élèves plusieurs choses :

1. Derrière des graphiques apparemment analogues, se cachent des fonctions différentes. Plusieurs élèves n'en sont pas conscients. Certains élèves considèrent la courbe $y = x^4$ comme une parabole, assimilant la fonction à l'allure de son graphique. Or ce n'est pas une fonction du second degré. Mais, comme ils classent les fonctions par rapport à leur graphique, ils ne font pas de distinction.
2. A une fonction, exprimée soit par un tableau, soit par une expression analytique, peuvent correspondre plusieurs graphiques, notamment en fonction de l'échelle choisie. Pour attirer leur attention sur ce fait, plusieurs activités peuvent leur être présentées. Par exemple, nous pouvons leur demander de représenter une parabole dans différents repères (éloignement ou zoom), tout comme c'est le cas pour l'activité 27 ou leur faire expérimenter qu'une fonction exponentielle se représente par une courbe dans un système d'axes classique et par une droite sur du papier semi-logarithmique.

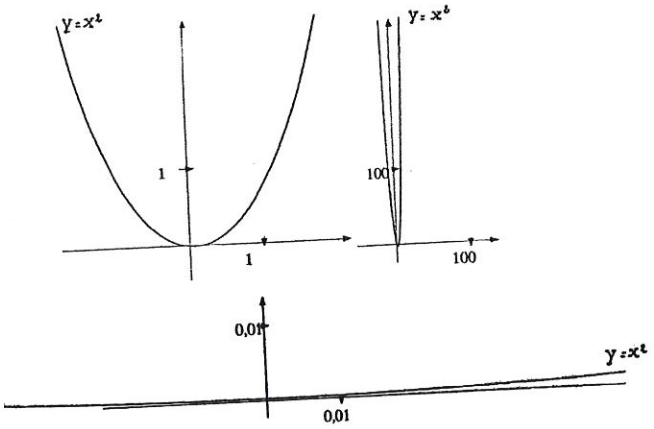
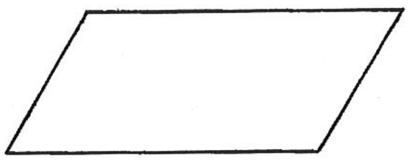
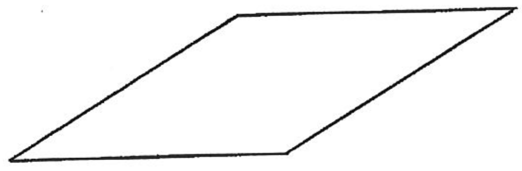


figure 2.27: Problème 27, issu du projet AHA, 1999

Il n'y a donc pas bijection entre les fonctions et les graphiques qui les représentent : un graphique n'est qu'une représentation parmi d'autres d'une même fonction et des fonctions différentes pourraient être représentées exactement par la même courbe. Pensons à $y = x^2$ et $y = 2x^2$ en changeant judicieusement les unités sur les axes. On observe la même ambiguïté en géométrie entre les dessins et les objets géométriques que ces dessins représentent. Plusieurs personnes peuvent interpréter un même dessin de plusieurs manières.



Ceci sera un parallélogramme pour certains et pour d'autres la représentation d'un plan dans l'espace.
Et par ailleurs, le dessin suivant pourrait représenter un parallélogramme avec un angle de 30 degrés ou tous les parallélogrammes. Il faudra ajouter un texte au dessin pour préciser l'objet géométrique, par exemple : soit un parallélogramme.



Sans doute retrouve-t-on pour les figures géométriques la non-nécessité de fidélité dont parle Anna Sierpinska à propos des graphiques.

Anna Sierpinska reproche également que le graphique soit une représentation statique car elle cache le dynamisme des fonctions, dans le sens où on ne voit pas comment un point particulier a été déplacé. Par contre, nous avons pu observer que les élèves essayent de recréer un certain type de mouvement dans le travail sur les classes de fonctions. Les élèves sont enclins à interpréter les transformations en termes de mouvement. Nous en avons eu l'illustration lors de notre expérience dans les classes. Les élèves devaient considérer la courbe translatée de trois unités vers la droite de $y = x^2$, à savoir $y = (x - 3)^2$. Ils dessinent alors les deux paraboles sur le même système d'axes et certains, pour trouver l'expression analytique de la courbe translatée, utilisent un cheminement sur le graphique.
Mais, ils essayent également de recréer ce mouvement, lorsque, par exemple, ils font varier un paramètre et fixent les deux autres, en dessinant plusieurs fonctions sur le même graphique.

2.6 Synthèse sur le concept général

Anna Sierpinska prétend que la définition qui peut être donnée d'une fonction peut constituer un obstacle pour les élèves.

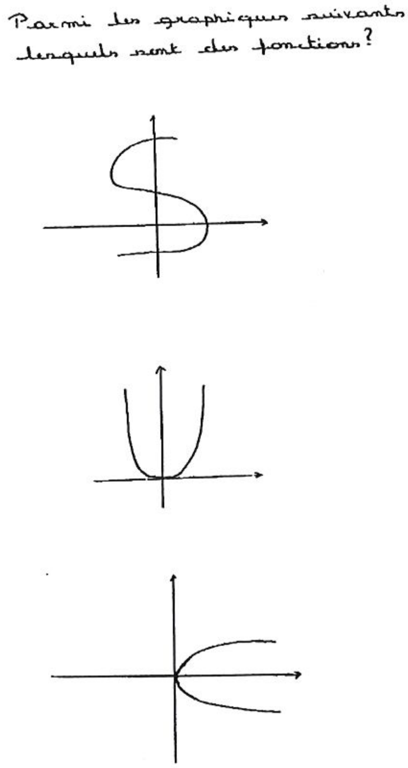
Obstacle 15 : ***La définition est une description d'un objet connu autrement que par les sens et la perception. La définition ne doit pas déterminer l'objet, plutôt l'objet détermine la définition.***

Pour elle, la définition suivante, donnée par Dirichlet est suffisante au niveau du secondaire : "Si une variable y est reliée à une variable x de telle sorte que quand une valeur numérique est assignée à x, il y a une règle selon laquelle une valeur unique de y est déterminée, alors y est appelée fonction de la variable indépendante x".

A notre avis, la conception de la notion de fonction va évoluer dans la tête des élèves au fur et à mesure de l'expérience qu'ils en auront, de leur culture en la matière. La définition de fonction pourrait donc, en regard de cela, évoluer elle aussi au fur et à mesure de leur cursus, en fonction des exemples qui ont été traités et l'idée qu'ils ont des fonctions. Leur donner une définition toute faite dès le départ n'est peut-être pas profitable.

De plus, ce que les élèves retiennent souvent de la définition d'une fonction, c'est que à un x ne peut pas correspondre deux y et c'est tout. Et, si une insistance trop forte est octroyée à cette unicité d'image, les élèves peuvent alors ne plus accorder d'importance à la dépendance qui est présente dans la fonction. Mais, étant donné que toutes les fonctions sont de la forme $y = \ldots$, il y a déjà une idée implicite de l'unicité.
L'unicité d'image fait sens au moment de considérer les fonctions réciproques et notamment celle de la fonction $y = x^2$. En effet, pour nous il y a alors deux fonctions à considérer.

En tout cas, dans l'histoire des mathématiques, pendant assez longtemps, cela n'a pas gêné d'appeler fonctions des courbes non fonctionnelles. Or, à l'heure actuelle, on cristallise l'apprentissage des fonctions autour de cet aspect. On fait notamment faire aux élèves des tas d'exercices du type de l'exercice 28 ci-dessous. Et finalement, la multiplicité des images joue une rôle d'interdit.



En outre, une synthèse sur les différentes manières de donner une fonction et de la représenter (expression analytique, tableau numérique, graphique), permettra aux élèves de mieux sentir la diversité. Et, il y a de plus un intérêt à étudier conjointement de manières algébrique et géométrique les transformations du plan sur les graphiques de fonctions.
Par exemple, dans notre expérience pour les fonctions du second degré, nous avons montré aux élèves que toutes les fonctions de ce type pouvaient aussi s'obtenir par des transformations à partir de la courbe $y = x^2$.

A propos de difficultés liées au concept général de fonction, Anna Sierpinska cite ensuite l'obstacle suivant en seizième position.

Obstacle 16 : ***Les changements d'une variable sont des changements dans le temps.***

Il nous semble avoir déjà évoqué des éléments pour pouvoir interpréter cet obstacle lorsque nous avons parlé de la difficulté des élèves à percevoir une variation : les variations temporelles sont les plus facilement perçues. Mais, il s'agit ici d'un versant plus négatif du même propos qui consisterait à dire que seules les variations temporelles sont des fonctions. D'où l'importance, pour nous, de mélanger des exemples dans lesquels la variable indépendante est le temps à d'autres problèmes où la variable indépendante n'est pas le temps, comme celui où la hauteur de rectangles varie en fonction de la base. Ce mélange permet aux élèves de voir qu'on peut étudier les variations d'une grandeur non pas en fonction du temps mais en fonction d'une autre grandeur.

Le problème de la tache d'huile (cfr problème 29 ci-dessous) nous permet d'illustrer deux choses : à la fois l'intérêt d'introduire le temps là où l'idée de variation est absente a priori, par exemple dans le calcul d'une aire, et la nécessité de "s'en débarasser" après coup. En effet, la difficulté pour les élèves est de passer d'une vitesse instantanée qui est une dérivée par rapport au temps au taux de variation instantané dans lequel la variable indépendante n'est plus dans le temps. Dans le problème de la tache d'huile, la vitesse instantanée de l'aire est la longueur du segment $f(x)$ car $x = t$. Mais, si nous avons $x = 2t$, alors $f(x)$ est la dérivée de l'aire par rapport à x et plus par rapport à t. Les élèves ne perçoivent pas $f(x)$ comme le taux d'accroissement instantané de l'aire sous la courbe par rapport à x, mais, ils perçoivent ce segment comme l'accroissement instantané de cette aire, car pour eux, c'est la grandeur minimale qu'on doit rajouter, à la vitesse de la pensée, pour constituer la surface en allant de gauche à droite. Pour eux, il ne s'agit même pas d'un taux car la variable indépendante est implicite : le temps du déroulement de la pensée.

Une tache d'huile sous une courbe

Soit la courbe d'équation

$$y = f(x) = 1 - x^4 \qquad \textbf{(10.1)}$$

dont le graphique est donné en partie par la figure 10.6. Que vaut l'aire comprise sous cette courbe entre les abscisses 0 et 1 ?

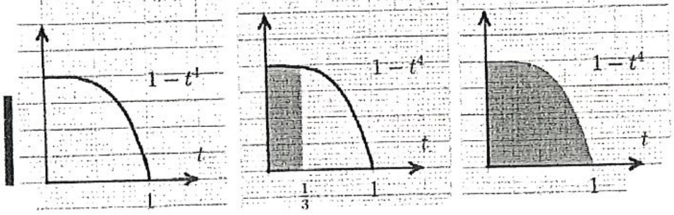


Figure 10.6

> On propose l'expérience mentale suivante : imaginons que la surface considérée soit progressivement recouverte par une tache d'huile qui grandit au fil du temps, atteignant au temps t tous les points situés sous la courbe jusqu'à l'abscisse $x = t$. La tache avance avec une vitesse constante égale à l'unité ($x = t$).
>
> a) Calculez la vitesse de croissance de l'aire.
>
> b) Déduisez-en l'aire recherchée.

a) Désignons par $A(t)$ l'aire de la tache à l'instant t. Elle augmente selon une vitesse donnée par

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}.$$

La différence $A(t+\Delta t) - A(t)$ est l'aire du «trapèze curviligne» rempli entre les instants t et $t + \Delta t$.

Comme la courbe descend constamment, le quotient

$$\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

est la longueur d'un segment vertical intermédiaire entre les bases du trapèze curviligne. Cette longueur est comprise entre $f(t)$ et $f(t+\Delta t)$ et tend vers $f(t)$ quand Δt tend vers 0. C'est la vitesse de croissance de l'aire.

b) Comme $t = x$, le résultat précédent s'écrit aussi

$$A'(x) = f(x) = 1 - x^4.$$

Il faut donc chercher $A(x)$ parmi les fonctions dont la dérivée est $1 - x^4$, c'est-à-dire

$$A(x) = x - \frac{x^5}{5} + C$$

où C est une constante. Comme $A(0) = C = 0$, on a

$$A(x) = x - \frac{x^5}{5}.$$

L'aire cherchée vaut

$$A(1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

figure 2.28: Problème 29, issu du projet AHA, 1999

2.7 Conclusion

Anna Sierpinska prétend que tous ces obstacles sont des obstacles épistémologiques. Ce qui signifie que ce sont des obstacles qui surviennent lorsque l'intuition et la théorie ne correspondent pas, c'est-à-dire des obstacles qui surviennent quand les notions mathématiques sont trop éloignées de l'univers familier des élèves ou de leur perception intuitive et qui sont incontournables quelles que soient les modalités d'enseignement.

Cependant, nous pouvons penser que beaucoup de ces obstacles pourraient être traités en les travaillant, ce qui contribuerait à changer la conception de l'élève. Ces obstacles seraient alors didactiques, c'est-à-dire des obstacles qui ont leur source dans la transposition didactique effectuée en vue de l'enseignement d'un certain contenu. Ce sont des obstacles qui ne dépendent que d'un choix ou d'un projet éducatif.

Toutefois, certains obstacles sont bien du type épistémologique. Par exemple, l'obstacle 16 concernant les changements d'une variable dans le temps est une intuition très présente.
Nous reviendrons sur ceci dans la conclusion globale.

Deuxième partie

Expérimentation dans les classes

Chapitre 3

Observations au Collège Saint-Paul de Godinne

Ce travail a été présenté à deux classes d'une vingtaine d'élèves. Ceux-ci ont au préalable refait quelques manipulations sur les calculatrices graphiques par le biais des fonctions du premier degré. Ils ont notamment réutilisé les fonctions "zoom" et "trace".
En outre, la notion de lieux de points au sens géométrique du terme n'est pas présente dans la culture des élèves. En fait, le professeur de ces deux classes n'a pu, contrairement à son intention, initier les élèves aux lieux géométriques avant nos interventions programmées en fonction de nos contraintes.
Cette situation n'a pas permis aux élèves de revoir préalablement l'équation d'une courbe comme contrainte portant sur les coordonnées de ses points et inversement, le graphique d'une fonction comme lieu de points dont les coordonnées vérifient une expression analytique donnée.

3.1 Première activité : Explorer l'identité graphique des fonctions $y = ax^2 + bx + c$

3.1.1 Déroulement de l'expérimentation

La première question posée à ces élèves est : *A quels types de graphiques conduisent les fonctions du second degré $y = ax^2+bx+c$ lorsqu'on fait varier a, b et c ? Essayer de dégager les rôles de ces paramètres.*
Cela à l'aide de la calculatrice graphique.

Pour leur faire comprendre l'enjeu du travail, nous leur avons rappelé en quoi a consisté l'étude de la classe des fonctions du premier degré $y = ax+b$, paramétrée par le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine : la racine est

$-b/a$ et l'allure du graphique dépend du coefficient angulaire, droite croissante si a est positif et droite décroissante si a est négatif ; tout en accompagnant nos dires par des dessins.

Les élèves étaient invités à travailler par groupe de quatre, à consigner toutes leurs réactions et à rediger un rapport qui traduit le travail de leur groupe.
Nous passions à quatre d'un groupe à l'autre pour observer les élèves au travail et pour les inviter au besoin à préciser et à argumenter leurs pensées. Nous leur avons aussi suggéré de temps à autre d'utiliser l'ensemble des fonctionnalités de la calculatrice. Une de leurs grandes difficultés est de laisser une trace écrite de leurs essais infructueux.

Néanmoins, les rapports reçus après deux heures de cours consécutives restent significatifs à la fois de leurs difficultés et de leurs erreurs tout en donnant un aperçu d'un consensus au sein de chaque groupe.

3.1.2 Conjectures faites par les élèves

Parmi toutes les conjectures reprises dans les rapports, nous en avons sélectionné quinze que nous avons transmises aux élèves. Nous reviendrons plus loin sur l'enjeu de cette entreprise et sur nos critères de sélection.
Les autres conjectures, non reprises dans cette liste, sont classées ci-dessus, d'abord suivant qu'elles concernent la forme du graphique et l'intersection avec l'axe ox, un paramètre isolé ou encore tous les paramètres.

Quinze conjectures renvoyées aux élèves

1. Quand b est positif, la parabole est à gauche de l'axe des y. Quand b est négatif, la parabole est à droite de l'axe des y.
2. La courbe passe par le point $(0, c)$.
3. Il y a trois intersections : deux racines et une ordonnée.
4. Pour dessiner la même parabole vers le bas, il suffit de remplacer a par son opposé.
5. Nous ne sommes plus dans des graphiques en ligne droite mais en parabole.
6. Les courbes $y = x^2 + bx$ passent par les points $(-b, 0)$ et $(0, 0)$.
7. b fait varier l'élargissement de la courbe.
8. c est le sommet de la courbe.

9. Quand a et b sont fixés, les paraboles sont sur la même abscisse et ont la même forme.
10. En faisant varier a, on obtient des courbes qui atterrissent sur une même droite ou longent une même droite.
11. Plus a va être grand, plus la courbe va être pointue. Plus a est petit, plus la courbe va être plate.
12. c fait glisser la parabole sur l'axe des y suivant le signe de c (monter ou descendre).
13. Pour une même valeur de a, les paraboles ont (toutes) la même forme.
14. $y = x^2 + c$ est une courbe croissante et $y = -x^2 + c$ est une courbe décroissante.
15. Si $b = 0$, la parabole sera à égale distance du côté négatif de l'abscisse et du côté positif de l'abscisse.

L'ordre dans lequel nous reprenons ces conjectures a un caractère aléatoire. Nous avons voulu transmettre aux élèves les réponses récoltées en vrac pour les inciter à les trier d'un point de vue qui sera décrit ci-dessous.

Conjectures relatives à la forme du graphique et à sa position

Les élèves constatent que le graphique de ces fonctions est une parabole. Ils connaissent le mot "parabole" pour avoir tracé point par point avec leur professeur de troisième, les courbes $y = kx^2$. Le mot "parabole" renvoit donc à une allure globale en U, éventuellement renversée. Mais en aucun cas il ne s'agit d'un lieu de points en terme d'équidistance d'un point et d'une droite fixes, c'est-à-dire que le rôle de l'équation du lieu est méconnu.

Pour décrire ces paraboles, les élèves utilisent un vocabulaire peu canonique. Par exemple, ils semblent distinguer concavité vers le haut et vers le bas en parlant de croissance et de décroissance des paraboles.
Notons aussi que certains parlent de droites au lieu de paraboles, mais il s'agit sans doute d'un lapsus.

Ils s'attendent toujours à avoir une parabole. Ils se disent immédiatement qu'ils se sont trompés lorsqu'ils voient un segment de droite ou une courbe d'une autre forme (par exemple une courbe du troisième degré programmée par erreur.

Plusieurs élèves envisagent les intersections avec les axes. Certains distinguent bien tous les cas possibles mais d'autres ne voient pas qu'il pourrait ne pas y avoir de racine. Certains prétendent aussi "qu'il n'y a qu'une racine si la courbe passe par $(0,0)$". Ceci n'est pas précis mais ils ont peut-être voulu dire que le sommet de la courbe est $(0,0)$. Il s'agit alors d'une racine double.

Concernant le paramètre a

- " a détermine la concavité de la parabole c'est-à-dire si a est positif, la parabole est tournée vers le haut et si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas".
- " Plus a est grand, plus la parabole est étroite. Plus a est petit, plus la parabole est large".
  Quelques remarques peuvent être faites à ce sujet. Quand ils disent plus grand ou plus petit, c'est en valeur absolue car ils expliquent que si $a = -13$, la parabole est plus étroite que si $a = -2$. Certains ont une façon particulière d'expliquer ce qu'ils constatent. Ils écrivent : plus a augmente plus la différence qui sépare le point le plus à droite et le plus à gauche sur l'abscisse diminue; ou encore plus a augmente plus la valeur positive et la valeur négative se rapprochent. D'autres emploient le mot "épaisseur" ou "largeur", c'est-à-dire, ils affirment que la variation de a entraîne un changement au niveau de l'épaisseur de la courbe.
- Un groupe prétend que "si a est négatif, nous avons des hyperboles".
- Tous les élèves constatent aussi que si $a = 0$ ils obtiennent une droite.
- Quelques-uns voient la symétrie orthogonale entre les courbes avec a positif et a négatif lorsque b et c sont fixés. Cependant peu d'élèves parlent de ces transformations.

Concernant le paramètre c

- " c détermine l'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées".
- " c est l'ordonnée à l'origine. Car quand $x = 0$, on obtient $y = c$". Mais, ceci n'est pas acquis et constaté par tout le monde.
- "Si $c = 0$, les courbes passent par $(0,0)$".
- "Si c est négatif, la courbe est sous l'axe des x". Cette affirmation manque toutefois de précision.

Concernant le paramètre b

- "Plus la valeur de b est élevée, plus la parabole descend sous l'axe des x".
- "Plus b est élevé, plus la pente est élevée". Nous aurions pu alors demander à l'élève l'idée qu'il avait derrière le mot pente. Voulait-il parler de la pente de la droite tangente à la courbe ?

- "Si a est négatif et b positif, la parabole se situe du côté des x positifs et si a est négatif et b négatif aussi, alors elle se situe du côté des x négatifs".
- "Lorsque b varie dans les positifs, il y a un déplacement de la parabole vers le bas à gauche. Lorsque b varie dans les négatifs (devient plus négatif), il y a un déplacement vers le bas à droite".
- "En augmentant régulièrement b, avec a et c fixés, les paraboles seront proportionnelles".
- "Au plus b est grand dans les positifs, au plus la parabole s'approche de l'axe des x. De même, au plus b est négatif, au plus la parabole s'approche de l'axe des x".

Conjectures mobilisant les trois paramètres

Quelques-uns ont également remarqué que "si l'on multiplie les valeurs des paramètres par un même coefficient, on obtient une parabole qui est à l'intérieur de la parabole initiale". "Nous avons l'effet inverse si nous divisons les paramètres par un même coefficient".

Si a, b et c sont nuls, alors les élèves disent qu'il n'y a pas de courbe.

3.1.3 Analyse du rôle des calculatrices graphiques dans la recherche des élèves

La tradition en Belgique en matière d'étude de fonction, est de proposer d'examiner le graphique des fonctions une par une, sauf, dans une certaine mesure, à propos des fonctions du second degré.
Mais, dans ce cas l'étude de la classe est faite par le professeur lors de la théorie et jamais les élèves ne sont invités a priori à s'interroger sur l'identité graphique de la classe entière : $y = ax^2 + bx + c$.
On imagine difficilement comment le leur proposer s'ils ne disposent que du seul instrument "papier-crayon".

L'accès à une calculatrice ou à un logiciel permettant d'obtenir des graphiques change les données de la situation. En effet, avec une calculatrice de type Casio, en moins de deux heures, la récolte des conjectures établies par les élèves est impressionnante.

L'obtention quasi immédiate d'un graphique d'une fonction à partir de valeurs numériques des trois paramètres permet un grand nombre d'essais. Par ailleurs, la présence de trois paramètres complique l'investigation des élèves et les oblige à sérier leurs essais. Certains s'aperçoivent qu'ils ne peuvent rien dire en changeant à la fois a, b et c à chaque essai hormis une conjecture relative à l'allure de la courbe à savoir sa forme parabolique. D'où l'idée des stratégies suivantes :

1. Fixer deux paramètres et faire varier le troisième
2. Fixer un paramètre et faire varier les deux autres

La première stratégie est celle qui est généralement utilisée et la deuxième est peu présente.
Ces stratégies, et surtout la première, peuvent s'observer dans les exemples choisis par les élèves et repris dans les rapports. L'un ou l'autre d'entre eux évoque la démarche de recherche d'hypothèses telle que travaillée au cours de sciences : "On ne fait varier qu'une chose à la fois".
Ces stratégies permettent de dégager assez vite les rôles de a et c. Par contre, le rôle de b est plus difficile à cerner.

L'accès à une calculatrice met donc d'emblée sur le tapis l'idée de variation des paramètres, un par un ou tous ensemble, bien que cette variation ne soit pas toujours envisagée de manière complète. Ainsi, certains ne pensent pas à toutes les possibilités, ils donnent souvent des valeurs positives aux paramètres mais ils oublient qu'elles peuvent devenir négatives.
Il induit à ce point cette idée qu'il y enferme les élèves en un sens que nous allons décrire ci-dessous.
Pour cela distinguons deux types de fonctions en jeu dans cette expérience.

- Le premier type est les fonctions du second degré elles-mêmes qui à x font correspondre $ax^2 + bx + c$ pour un triplet (a, b, c) donné.
  Leurs graphiques sont des lieux de points dont les coordonnées (x, y) vérifient précisément l'équation $y = ax^2 + bx + c$.
- La fonction qui a chaque valeur du triplet (a, b, c) fait correspondre un graphique tel qu'affiché sur l'écran de la calculatrice. Par exemple la fonction qui, à chaque valeur de a, b et c étant fixés, fait correspondre une courbe sur la calculatrice.

Le premier type cadre un univers que nous appelerons "expression analytique-lieu" et le second un univers que nous appelerons "triplet de paramètres-courbes".

Exemples de réactions d'élèves qui se situent dans le premier univers :
- "x et y sont des variables et y varie en fonction de x. Nous voyons que les élèves perçoivent la notion de variable dépendante et indépendante".

- Prouver que le point $(0, c)$ appartient à la courbe en remplaçant x par 0 dans l'équation de la courbe.

Exemples de réactions d'élèves qui se situent dans le second univers :

- "Plus le coefficient c est grand dans les positifs plus la courbe sera haute sur l'ordonnée".
- "Plus a va être grand plus la courbe va être pointue, plus a va être petit plus la courbe va être plate".

Nous avons tout lieu de penser que la recherche proposée par le biais de la calculatrice a tendance à les cantonner au deuxième univers bien que certains élèves s'en dégagent par des propos concernant le premier univers (cfr ci-dessus).
Et c'est d'autant plus le cas, que les élèves rencontrés dans ces classes n'avaient pas été plongés au préalable dans l'univers "expression analytique-lieu".
Ainsi, nous avons été étonnés de constater que peu d'élèves savaient contrôler que les fonctions passaient par le point $(0, c)$ en remplaçant x par 0 et y par c.
Un autre indicateur nous a frappé. Un groupe qui, pour contrôler que les courbes passaient par $(0, c)$, a remplacé non pas x par 0 mais a et b par 0 et aurait dû obtenir le graphique d'une droite d'équation $y = c$.
Plus généralement, est peu disponible l'idée de vérifier qu'un point appartient bien à une courbe en contrôlant que ses coordonnées vérifient l'équation correspondante même quand les coordonnées sont numériques.

En revanche, les élèves savent s'imaginer la variation des fonctions du deuxième univers grâce à la calculatrice graphique.
Expliquons ceci.
Quand on a une fonction $y = f(x)$, le graphique de cette fonction fournit en une seule image une infinité de couples appartenant au graphe qui définit la fonction. Mais de quels couples est fait le graphe d'une fonction appartenant au second univers. Par exemple, la fonction qui au triplet (a, b, c) fait correspondre une courbe affichée par la calculatrice.
Les premières composantes sont des triplets et les secondes sont des courbes. L'infinité des couples ne peut être représentée par une seule image, surtout si a, b et c varient tous les trois car cette image serait composée de toutes les paraboles possibles et imaginables dont l'axe de symétrie est parallèle à oy. Quand on se cantonne au cas où a seul varie pendant que b et c sont fixes, par exemple, on peut avoir une idée de ce graphe au moyen d'une image dynamique où l'on verrait la parabole se transformer au fur et à mesure que l'on fait varier a.

Certains logiciels le permettent, tout comme la calculatrice. Mais, par choix organisationnel, nous n'avons pas utilisé cette fonctionnalité avec les élèves. Tout d'abord parce que cela introduit une difficulté de gestion et de plus, les élèves ne connaissent pas du tout la présence de cette fonctionnalité.

Que peut-on faire de ce point de vue avec une calculatrice graphique du type considéré ?
On peut alors suggérer cette image dynamique en dessinant plusieurs de ces paraboles sur un même graphique. Et ce que font les élèves dans un certain nombre de cas. Même si on ne peut dessiner qu'un nombre fini de paraboles, on pense à l'infinité soit parce qu'il y a une idée de mouvement, soit par des propos comme " au plus..., au plus...".

Voici quelques conjectures que nous retrouvons dans les feuilles des élèves et qui nous font penser qu'ils ont en tête une image dynamique :

- " Au plus a est élevé , au plus la valeur positive de x et la valeur négative de x se rapprochent. Au plus a est petit, au plus la courbe est large".
- " Lorsque b varie dans les positifs, il y a un déplacement vers le bas à gauche et vers le bas à droite quand b varie dans les négatifs".
- " c fait glisser la courbe sur l'axe des ordonnées suivant le signe de c (monter ou descendre)".

C'est dans cette ambiance dynamique que les élèves considèrent des paraboles qui ont une même tangente. Il y a alors une chance que la tangente soit considérée comme une dégénérescence de la courbe et non comme une approximation de la parabole autour de $x = 0$.

Cette variété de graphiques disponibles grâce à la calculatrice fait rapidement apparaître des régularités : d'abord une identité graphique très forte, la forme parabolique, et ensuite des régularités liées au jeu d'influence de chacun des paramètres. Ces régularités sont tellement prégnantes que les élèves ont du mal à s'imaginer qu'elles soient l'effet du hasard. D'où la conviction très forte qu'il n'y a rien d'autre à prouver que d'exhiber les différents graphiques.
Ceci permettrait d'interpréter pourquoi et nous l'avons constaté, nombreux sont les élèves qui n'éprouvent aucun besoin de prouver quoi que ce soit, si ce n'est en demandant à la calculatrice d'exhiber plusieurs graphiques. Sans compter sur une absence de culture de la validation que des élèves de cet âge peuvent avoir, du moins en ce qui ne concerne pas la géométrie.

Une brèche, cependant, pourrait s'ouvrir dans cette foi en la calculatrice lorsque les élèves réalisent que leurs calculatrices graphiques respectives n'affichent pas le même graphique alors qu'ils ont programmé la même fonction. Mais, là encore, ils en imaginent assez vite la raison, en invoquant que l'échelle utilisée doit être différente.
On pourrait aussi leur donner une fonction du second degré avec de grands coefficients et lorsqu'ils veulent la représenter sur la calculatrice graphique, rien ne s'affiche. Le choix adéquat de la fenêtre nécessite une étude plus générale.

3.2 Deuxième activité : Retour sur la liste des quinze conjectures

Une fois ces observations faites, nous leur proposons la liste des quinze conjectures choisies dans leurs feuilles et nous leur posons la question suivante : *Indiquez-en une dont la formulation est trop vague et reformulez-la. Repérez-en une qui est fausse et justifiez pourquoi. Repérez-en une qui est vraie et que vous pouvez prouver. Prouvez-la.*

Les réponses vont un peu dans tous les sens. Cependant nous constatons que les conjectures qui sont à leur portée et qui peuvent être prouvées ne leur sautent pas aux yeux. Ainsi, nous voyons qu'il n'est pas si aisé pour eux de prouver que le point $(0, c)$ appartient à la parabole et que les courbes $y = x^2 + bx$ passent par les points $(-b, 0)$ et $(0, 0)$. Ce qui renforce notre hypothèse que les élèves sont plus dans l'univers "triplets de paramètres-courbes" que dans l'univers "expression analytique-lieu".

Un autre problème important est que les élèves pensent que l'on peut prouver à l'aide de la calculatrice, donc à l'aide d'exemples comme nous l'avons déjà signalé plus haut. Un élève a dit : "Il faut prendre une dizaine d'exemples et c'est bon".

Plus loin nous décrirons comment le professeur s'est servi de la liste des quinze conjectures comme référence récurrente pour faire son cours de théorie.

3.3 Troisième activité : Trouver l'équation d'une parabole image de la parabole $y = x^2$ par une translation de trois unités vers la droite

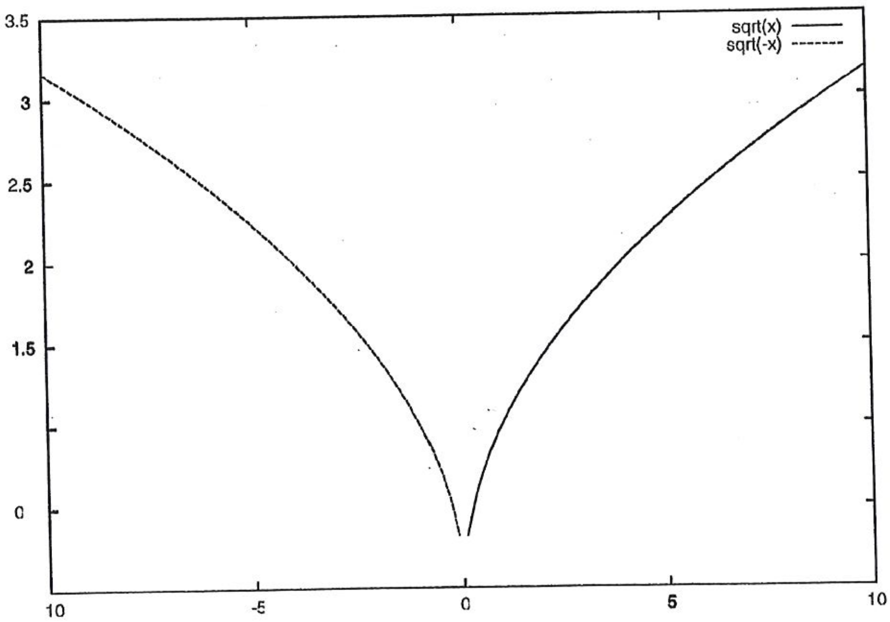
Nous leur posons la question suivante : *On translate de trois unités vers la droite la courbe donnée par* $y = x^2$*. Quelle est l'équation de la courbe translatée ?*
Nous leur demandons d'abord de tracer la courbe point par point. Pour cela, certains dressent des tableaux numériques de la forme :

x	
y	

ou

x	y

Aux tableaux, d'autres préfèrent des expressions telles que : si $x = ...$, alors $y = ...$ Mais cela peut parfois poser quelques problèmes. Ainsi, nous avons retrouvé dans les feuilles des élèves le raisonnement suivant : si $x = 1$, $y = 1^2$; si $x = 2$, $y = 2^2$. Ce qui les conduit au graphique suivant.



Après, les élèves représentent de la même manière la translatée dans le même système d'axes.
Ils peuvent alors chercher l'équation de la courbe translatée.

3.3.1 Par tâtonnement

Certains procèdent par tâtonnement. Ils prennent d'abord $y = x^2 + 3$. Mais ils voient, à l'aide de la calculatrice, que la parabole "monte". Ils prennent alors $y = x^2 - 3$, mais la courbe "descend". Ils essayent ensuite $y = x^2 + 3x$, mais la parabole ne va pas du bon côté. Alors, ils programment $y = x^2 - 3x$. Ils constatent que la parabole se trouve du bon côté mais est trop basse. Ils poursuivent en prenant $y = x^2 - 3x + 2$. Ils remarquent alors qu'ils n'ont que "la moitié de ce qu'ils veulent", voulant dire par là que la parabole a subi une translation de 3/2 unités et pas de trois. Ils choisissent ensuite $y = x^2 - 6x + 2$. Mais, cette courbe est encore trop basse. Ils font remonter la parabole en jouant sur le terme indépendant, parfois en une étape, parfois en plusieurs par ajustements successifs. Ils parviennent finalement à l'expression $y = x^2 - 6x + 9$.

D'autres tâtonnent de la même manière sans voir qu'il faut doubler le coefficient b lorsque qu'ils ont $y = x^2 - 3x + c$, où c est variable, et ne trouvent donc pas l'expression recherchée. D'autres encore, essayent l'expression $y = 3x^2$ mais la parabole est alors plus étroite et se situe à l'intérieur de la courbe $y = x^2$.

Un groupe propose la solution $y = (x - 3)^2$. Pour y arriver, ces élèves essayent $y = x^2 + 3$, $y = (x + 3)^2$ mais cela ne correspond pas à ce qu'ils cherchent. Pour le justifier, ils disent que c'est toute la figure qui est déplacée vers la droite. Car "si nous prenons $y = x^2 - 3$ alors il y a variation sur le y et pas sur le x". L'observateur demande alors s'ils peuvent utiliser une fonctionnalité de la calculatrice pour le prouver mais les élèves répondent qu'ils ne voient pas ce qu'il veut dire par là.

3.3.2 A l'aide de tableaux numériques

Un autre groupe dresse un tableau numérique pour chacune des deux courbes. Ils obtiennent :

Pour la première courbe

x	y
0.17	0.289

Pour la courbe translatée

x	y
3.17	0.289

Ils proposent alors $y = x^2 - 3$, mais ne sont pas allés plus loin.
D'autres font également des tableaux et essayent de les comparer.

Certains tentent d'établir des parallèles entre les courbes. Ils constatent que le point $(0,0)$ devient $(3,0)$, $(-1,1)$ devient $(2,1)$ et $(1,1)$ devient $(4,1)$. C'est un raisonnement qui relève plus de la géométrie analytique que de la pensée fonctionnelle.

Ce sont les résultats que nous avons pu observer après trente minutes de travail.

3.4 Reformulation de la troisième activité

Voyant qu'il y a peu de résultats, nous reformulons la question : *Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ et P' est l'image de P par la translation horizontale de trois unités vers la droite. Appelons (x', y') les coordonnées d'un point A' quelconque de la parabole P'. Trouvez le lien entre x' et y' et justifiez-le.*
Il s'agit donc de valider l'expression que plusieurs ont trouvée.

3.4.1 A l'aide de tableaux numériques

Plusieurs élèves reprennent des tableaux numériques, un pour P et un pour P'. Parmi ceux-ci, certains ont pris, dans leur tableau, des valeurs avec des décimales. A la fin, ils parviennent à dégager la régularité présente dans le tableau relatif à P' par rapport à P. Ils obtiennent donc $y' = (x' - 3)^2$ et un élève montre même le cheminement fait sur le graphe. Il envisage un circuit. Il considère le point A, sur la courbe translatée, son abscisse et lui retranche trois. Il élève ensuite au carré et propose le résultat obtenu comme ordonnée du point A.

Nous avons également relevé dans les feuilles des élèves un raisonnement du type :

$$y = y' = x^2$$

$$x' = x + 3 \Rightarrow x' = x - 3$$

$$\sqrt{y'} = x' - 3$$

$$\Rightarrow y' = (x' - 3)^2$$

3.4.2 Avec des écritures analytiques

Mais beaucoup traitent cela à l'aide de l'algèbre. Ils prennent alors le point A de coordonnées (x, y) sur la première parabole et un point A' sur la seconde, image de A par la translation en question, de coordonnées (x', y') sur la translatée. Ils ont dès lors les relations : $y = y'$ et $x' = x+3$. La difficulté est alors de combiner tous les éléments qui sont à leur disposition sans oublier d'utiliser la relation entre x et y, c'est-à-dire $y = x^2$. En combinant, ils obtiennent :

$$y' = y = x^2$$
$$x = x' - 3$$
$$\Rightarrow y' = (x' - 3)^2$$

Mais, le fait de jongler avec plusieurs relations n'a pas été simple pour tout le monde.

3.5 Poursuite du cours après cette expérimentation

Suite à ces séances d'expérimentation, le professeur a donné son cours avec une perspective de revenir sur la liste des conjectures. Une difficulté apparaît : les conjectures ont fait l'objet d'un tri et plusieurs d'entres elles n'évoquaient pas grand chose pour certains élèves car ils ne les avaient pas travaillées.

Le professeur a commencé par donner aux élèves une définition des fonctions du second degré : "Une fonction du second degré est une fonction dont l'expression analytique est $f(x) = ax^2 + bx + c$". Ensuite, elle a décrit la représentation graphique en disant que le graphe est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $y = ax^2 + bx + c$, et donc la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Le professeur a poursuivi son exposé en reprenant la liste des quinze conjectures dans le but de montrer aux élèves comment prouver qu'une conjecture est vraie ou fausse.
Elle propose de prendre la conjecture : "La courbe passe par le point $(0, c)$". Elle demande aux élèves comment on peut prouver que cette affirmation est vraie. Certains font des essais et hésitent, mais souvent en faisant varier le paramètre c sans travailler sur les variables. Peu d'élèves proposent les bons arguments : "Il faut remplacer x par 0 et on obtient $y = c$".
Une fois cette preuve faite, les élèves reconnaissent que cela a vraiment une valeur de preuve.
Remarquons également qu'il y a, chez les élèves, une confusion récurrente entre le point d'intersection avec l'axe des y, de coordonnées $(0, c)$ et le sommet de la courbe.

Puis, l'enseignante a pris la conjecture : "Il y a trois intersections : deux racines et une ordonnée". Les élèves ont alors très vite compris qu'il suffisait de donner un contre-exemple. Ils ont notamment pris l'exemple de la courbe translatée sur laquelle ils avaient travaillé, à savoir la courbe $y = (x - 3)^2$ qui n'a qu'une seule racine.

Le professeur a alors demandé aux élèves de rassembler les conjectures qui sont relatives au paramètre a.
Ils ont sélectionné les conjectures suivantes :
- Pour dessiner la même parabole vers le bas, il suffit de remplacer a par son opposé.

- En faisant varier a, on obtient des courbes qui atterrissent sur une même droite ou longent une même droite.
- Plus a va être grand, plus la courbe va être pointue. Plus a est petit, plus la courbe va être plate.
- Pour une même valeur de a, les paraboles ont (toutes) la même forme.
- $y = x^2 + c$ est une courbe croissante et $y = -x^2 + c$, est une courbe décroissante.

Ils ont immédiatement constaté que cette dernière conjecture est fausse car il y a confusion entre les mots "croissante" et "décroissante" et les mots "vers le haut" et "vers le bas".

Ces conjectures nécessitent une analyse plus précise, il faut les examiner de plus près. Pour cela, le professeur propose aux élèves de reprendre l'exercice qui concernait la translation de trois unités vers la droite de la courbe $y = x^2$. Mais, à ce moment, il a fallu traiter un autre obstacle : le passage de la notation à l'aide de primes, à la notation à l'aide des coordonnées d'un point courant (x, y). En effet, ils avaient obtenu l'égalité $y' = (x' - 3)^2$. Le professeur a alors expliqué que le point A' de coordonnées (x', y') est un point quelconque de la parabole translatée et donc que la relation trouvée est valable pour tous les points de la courbe. En conséquence, on désigne les coordonnées par x et y, ce qui donne l'équation : $y = (x - 3)^2$.
Le professeur fait alors remarquer que les deux courbes, $y = x^2$ et $y = (x-3)^2$ ont la même forme puisque la relation qui les lie est une translation et que, d'autre part $(x - 3)^2$ étant égal $x^2 - 6x + 9$, le paramètre a a la même valeur pour les deux courbes.

Pour poursuivre le travail sur le paramètre a, le professeur énonce l'activité suivante : *Dessinez, dans un même système d'axes, la parabole P d'équation $y = x^2$ et la parabole P' d'équation $y = 3x^2$. Décrivez la transformation géométrique qui fait passer de P à P' et justifiez-la en associant un point quelconque de P à son image sur P' par cette transformation.*

Les élèves ont donc dessiné point par point les deux courbes en faisant des tableaux numériques. Il s'agissait alors de comparer les deux tableaux pour trouver la relation entre les deux courbes. La difficulté est que, dans cet exercice, pour voir ce qui se passe, il faut comparer des points qui ont même abscisse, alors que les élèves ont tendance à faire des liens horizontaux. Quand les élèves prennent un même x, ils voient clairement que c'est l'ordonnée y qui est multipliée par trois. Il s'agit donc d'un étirement de coefficient trois.

Le professeur demande de faire de même lorsqu'on passe de $y = x^2$ à $y = \frac{1}{2}x^2$.
De nouveau, il est nécessaire de faire des liens verticaux, c'est-à-dire de comparer des points qui ont même abscisse. Les élèves pouvaient alors constater à partir des tableaux numériques, que pour un même x, c'est y qui est multiplié par $\frac{1}{2}$. Il s'agit ici d'une compression de coefficient $\frac{1}{2}$ parallèlement à l'axe Oy.

Le professeur a alors expliqué que ces transformations (étirement et compression) sont appelées des affinités verticales de coefficient a.

Elle propose de décrire la transformation qui fait passer de la courbe $y = x^2$ à la courbe $y = -x^2$ et de la courbe $y = x^2$ à la courbe $y = -2x^2$.
Les élèves travaillent de la même façon en comparant des points de même abscisse.
Dans le premier cas, ils constatent que pour un même x, le y est multiplié par -1, c'est-à-dire que les ordonnées sont opposées. Le professeur précise qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe $0x$, fait que les élèves ont pour la plupart constaté par eux-mêmes.
Dans le deuxième cas, le professeur travaille avec les élèves et ils constatent qu'il faut combiner deux transformations. Il faut d'abord appliquer une affinité verticale de coefficient 2, suivie ou précédée d'une symétrie orthogonale d'axe $0x$.

Le professeur présente alors quelques conclusions théoriques relatives aux courbes $y = ax^2$. La parabole d'équation $y = ax^2$ possède les caractéristiques suivantes :

- l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe car deux points ayant des abscisses opposées ont même ordonnée. En effet, $a(-x)^2 = ax^2$.
- le point $(0, 0)$ est le sommet de la parabole et ce sommet est minimum si $a > 0$ et maximum si $a < 0$.

Après avoir fait l'étude des courbes de type $y = ax^2$, le professeur entreprend l'étude des courbes $y = ax^2 + c$.
Pour cela, elle donne aux élèves l'activité suivante : *On applique une translation de deux unités parallèlement à l'axe* $0y$ *à la parabole* P *d'équation* $y = \frac{1}{2}x^2$. *Quelle est l'expression analytique associée à l'image P' ainsi obtenue ? Justifiez.*

Les élèves ont deux cas à envisager : soit deux unités vers le haut, soit deux unités vers le bas.
Ils vont de nouveau travailler avec la notation à l'aide des primes puis ils généralisent à tous les points de la courbe. Ils doivent de nouveau comparer des points sur P et P' qui ont même abscisse. Pour la translation vers le haut, pour un même x, les élèves voient qu'on ajoute 2 à y. En combinant toutes les relations dont ils disposent, ils obtiennent l'équation de la courbe P' : $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.
Pour la translation vers le bas, pour un même x, les élèves disent : "On soustrait 2 à y". De la même manière que dans le premier cas, ils trouvent l'équation de P' : $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Suite à cet exercice, le professeur fait une mise au point à propos du vocabulaire. Lorsque nous parlerons de translation verticale vers le haut (respectivement vers le bas), nous emploierons le terme translation verticale de + r(respectivement - r) et lorsque nous parlerons de translation horizontale de r vers la droite(respectivement vers la gauche), nous utiliserons le terme translation horizontale de + r (respectivement - r).

Le professeur va également faire une généralisation des courbes $y = ax^2+c$ de la manière suivante :
La parabole P' d'équation $y = ax^2+c$ est l'image de la parabole P d'équation $y = ax^2$ par la translation verticale de c (vers le haut si c est positif et vers le bas si c est négatif). Cette parabole est telle que :

- son sommet est le point de coordonnées $(0, c)$ (c'est un maximum si a est négatif et un minimum si a est positif)
- elle possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. En effet, $a(-x)^2 + c = ax^2 + c$, c'est-à-dire que deux abscisses opposées ont la même image.

Une fois cela établi, le professeur passe à un autre exercice. *On applique une translation de -3 unités parallèlement à l'axe des x suivie d'une translation de -5 unités parallèlement à l' axe des y à la parabole P d'équation $y = 2x^2$. Quelle est la formule associée à l'image P' ? Pourquoi ?*
On leur demandait de dessiner les deux courbes, de dresser un tableau numérique pour chacune des courbes, le lien entre x et x' et le lien entre y et y', et à partir de cela de donner l'équation de P'.

A la fin de leur recherche, ils obtenaient les relations suivantes :

$$x' = x - 3 \text{ et } y' = y - 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 5 \end{cases}$$

Comme $y = 2x^2$, on obtient :

$$y' + 5 = 2(x' + 3)^2 \iff y' = 2(x' + 3)^2 - 5$$

Or, x' et y' sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de P'. Donc l'équation de P' est $y = 2(x+3)^2 - 5$.
Les élèves ont pu déterminer qu'il s'agissait donc d'une translation de vecteur $(-3, -5)$.

La question que leur a ensuite posée le professeur est dans le même esprit. *On applique une translation de -1 parallèlement à l'axe des x suivie d'une translation de 2 unités parallèlement à l'axe des y à la parabole P d'équation $y = -x^2$. Quelle est l'équation de l'image P' ? Expliquez.*

Les élèves suivent exactement le même procédé qu'à l'exercice précédent et obtiennent finalement l'équation de P' : $y = -(x+1)^2 + 2$. Et dans ce cas, il s'agit d'une translation de vecteur $(-1, 2)$.

Suite à cette activité, le professeur pose deux questions aux élèves :

1. *Quelle est l'équation de la parabole P' sachant qu'elle est l'image de la parabole P d'équation $y = -5x^2$ par une translation de vecteur $(-7.3, 4.8)$? Cela sans dessins, ni calculs.*
   En observant le cheminement de l'exercice précédent, les élèves trouvent que P' a pour équation : $y = -5(x + 7,3)^2 + 4,8$.
2. *Quelle est l'équation de la parabole P' sachant qu'elle est l'image de la parabole P d'équation $y = 125x^2$ par une translation de vecteur $(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$? Cela sans dessins, ni calculs.*
   Et de la même manière, ils obtiennent que P' a pour équation : $y = 125(x - \sqrt{3})^2 - \sqrt{5}$.

Le professeur a alors proposé de généraliser ce qui venait d'être dit. La courbe P' obtenue à partir de P d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur (α, β) et dont l'équation est $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole ayant la même forme que P car les translations sont des isométries du plan. De plus, l'axe de symétrie de P' est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ et le sommet, de coordonnées (α, β), est un minimum si a est positif et un maximum si a est négatif.

Ensuite, elle a présenté aux élèves des exercices relatifs à cette théorie. Voici la question posée : *Par quelle transformation passe-t-on de $P \equiv y = x^2$ à $P' \equiv y = f(x)$ lorsque $f(x)$ répond à la formule ci-dessous :*

1. $f(x) = x^2 - 2$

2. $f(x) = (x-2)^2$

3. $f(x) = (x+1)^2 - 4$

4. $f(x) = -2x^2$

5. $f(x) = -2(x+3)^2 + 1$

6. $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Pour répondre à la question, les élèves devaient donner les transformations opérées, les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie,l'intersection avec $0y$ et les racines. Tous ces éléments étaient retranscrits sous forme de tableau.

Après cette activité, le professeur a de nouveau proposé une petite synthèse : toute fonction $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ a pour représentation graphique la parabole P d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ obtenue à partir de $y = x^2$ en composant une affinité verticale et/ou une symétrie orthogonale d'axe $0x$ avec la translation de vecteur (α, β).

Une fois ceci établi, l'enseignante leur posa la question suivante : *peut-on considérer les courbes d'équations*

1. $y = x^2 - 4x + 5$

2. $y = x^2 + 3x + 1$

3. $y = 2x^2 + 4x$

4. $y = 2x^2 + 4x - 3$

5. $y = -4x^2 + 4x + 3$

6. $y = 6x^2 + 11x + 15$

comme transformées de la courbe $y = x^2$? Si oui, par quelles transformations ?

De nouveau, les élèves étaient invités à remplir le tableau composé des élèments : transformations opérées, coordonnées du sommet,axe de symétrie, intersection avec $0y$ et les racines.
Mais, il fallait faire un travail préalable sur l'équation de la courbe pour obtenir une équation du type $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Il s'agissait donc d'effectuer

la complétion au carré. Ce qui fut fait par les élèves dans chaque cas.

Le professeur a alors traité de manière théorique le cas général des fonctions $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a différent de 0. Elle a montré aux élèves que toute fonction de cette forme peut être remise sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Et donc elle donne la synthèse suivante : toute fonction du second degré, $f(x) = ax^2+bx+c$, est une parabole obtenue par translation de $y = ax^2$,caractérisée par :

- un sommet de coordonnées $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ (minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$)
- un axe de symétrie parallèle à $0y$ d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

Le professeur a ensuite proposé de mettre en application les résultats ainsi établis.
Voici les exercices donnés.

1. Déterminez par calcul, le sommet des paraboles associées aux fonctions suivantes. De quelle fonction ax^2 peuvent-elles être déduites par translation ? Le sommet est-il minimum ou maximum ?
   - $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
   - $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
   - $f(x) = 3x^2 + 9x$
   - $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
   - $f(x) = 6x - 4x^2$
   - $f(x) = 9 - 4x^2$
   - $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{4}$
   - $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

2. Déterminez l'expression analytique des fonctions du second degré dont le graphe répond aux caractéristiques suivantes :
   - Le sommet est le point de coordonnées $(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ et la parabole est image de $P \equiv y = -x^2$ par une translation.
   - Le sommet est le point de coordonnées $(0, -5)$ et la parabole est image de $P \equiv y = 2x^2$ par une translation.
   - La parabole est image de $P \equiv y = 3x^2$ par une translation et passe par les points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(2, 0)$.
   - La parabole a pour sommet $(2, -1)$ et elle passe par $(0, 5)$.
   - La parabole a une équation de la forme $y = 2x^2 + mx + p$ et passe par les points de coordonnées $(4, -1)$ et $(0, -1)$.

3. Après avoir factorisé et/ou en appliquant la règle du produit nul, résolvez les équations suivantes :
   - $(2x-1)(5x+3)=0$
   - $4x^2-1=0$
   - $16x^2=9$
   - $x^2-10x+25=0$
   - $x^2-25x=0$
   - $(x+2)^2-3(x+2)=0$
   - $4x^2+49=0$
   - $7x^2=-5$
   - $6x^2=-11x$
   - $x^2+4x+3=0$
   - $2x^2-3x+1=0$
   - $x^2-2x+5=0$

Jusqu'à présent, les élèves ont résolu des équations du second degré, notamment pour trouver les racines d'une fonction, soit en mettant en évidence soit en utilisant la différence de deux carrés, les carrés parfaits, la somme de carrés. Ils obtenaient donc les solutions en factorisant et en appliquant la règle du produit nul.

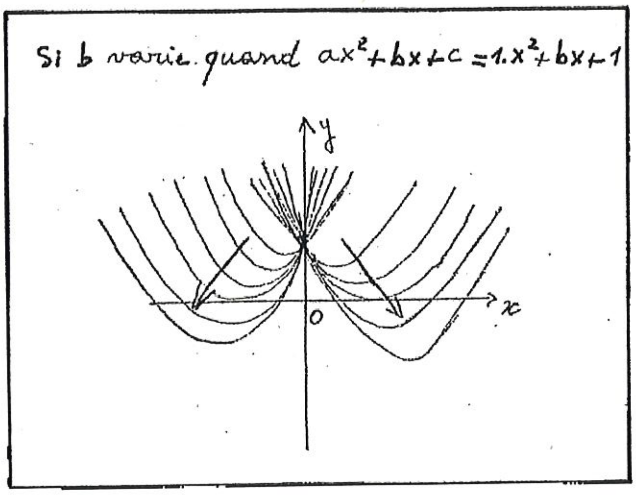
Le professeur démontre alors, en faisant un lien avec les exercices résolus avec la différence des carrés ou les carrés parfaits, qu'il y a une autre manière de calculer des racines de $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$. Pour calculer les racines de cette fonction, il faut résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$. Elle a montré aux élèves que pour résoudre cette équation, il fallait d'abord calculer le réalisant $\rho = b^2-4ac$ et que le nombre de solutions dépend du signe de celui-ci :
- si $\rho > 0$, il y a deux solutions qui sont $\frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a}$
- si $\rho = 0$, il y a une solution qui est $\frac{-b}{2a}$
- si $\rho < 0$, il n'y a pas de solutions.

Mais, l'enseignante a également insisté sur le fait que dans certains cas, l'appel aux formules n'est pas nécessaire, notamment lorsqu'on peut mettre en évidence ou que l'on a une différence de deux carrés.

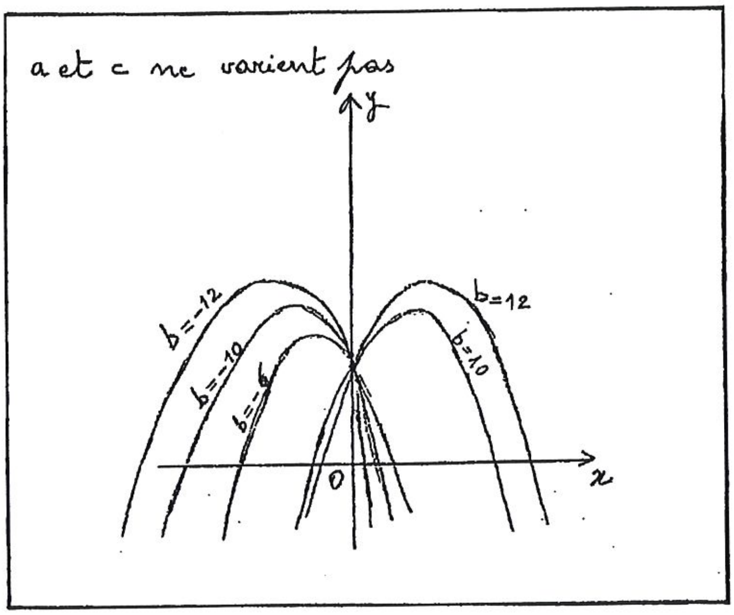
En guise de conclusion, avant l'examen, le professeur a demandé aux élèves de reprendre la liste des quinze conjectures qui avait été établie au début de l'expérimentation. Les élèves ont ainsi pu se positionner par rapport aux conjectures et justifier chacune d'elles grâce à la théorie qui leur a été dispensée. Certaines ont ainsi été prouvées, d'autres rejetées et d'autres encore précisées lorsqu'elles étaient trop vagues.

A l'examen, le professeur a repris certaines conjectures que nous avions trouvées sur les feuilles des élèves. Elle leur posait des questions relatives à cette conjecture en demandant de justifier leurs réponses à l'aide de la théorie qui avait été développée. Voici les questions qui ont été posées à l'examen :

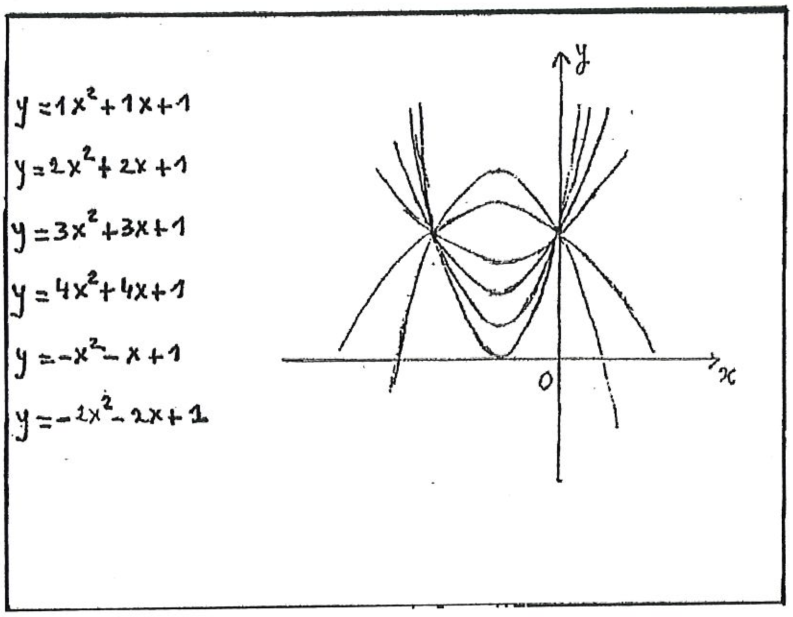
1. Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Expliquez ce dessin en répondant aux questions suivantes :
   - Il y a un point commun à toutes les courbes : lequel et pourquoi ?
   - Les courbes ont-elles toutes la même forme ? Pourquoi ?
   - Quelle signification donner aux flèches qu'il y a sur le schéma, sachant que ce dessin a été obtenu en attribuant différentes valeurs à b ? Expliquez.



2. Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Commentez le dessin par rapport aux indications relatives à a,b et c qui sont mentionnées en répondant aux questions suivantes :
   - Toutes les courbes ont-elles la même forme ? Pourquoi ?
   - Il y a un point commun à toutes les courbes : Pourquoi ?
   - Que dire de la position des sommets ? Justifiez vos affirmations.
   - Quel est le signe de a ? Et celui de c ? Pourquoi ?



3. Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Expliquez ce dessin en répondant aux questions suivantes :
   - Toutes les courbes passent par le même point sur l'axe des y : expliquez pourquoi. Quel est ce point ?
   - Le dessin semble parfaitement symétrique par rapport à une droite verticale : de quelle droite s'agit-il et pourquoi ?
   - Il y a un deuxième point par lequel toutes les courbes passent : quel est ce point ? Justifiez.
   - Les courbes n'ont pas toutes la même forme : pourquoi ?



Comme nous pouvons le voir sur les copies des élèves qui se trouvent en annexe, quelques difficultés subsistent encore pour certains élèves. Bien qu'ayant à leur disposition tous les outils pour prouver et détailler ces conjectures, certains élèves ont du mal à jongler avec tous les éléments qui caractérisent la classe des fonctions du second degré.
Nous pouvons également remarquer un manque de précision et de justification dans leurs réponses.
Un autre élément apparaît au vu des réponses : les élèves font référence aux conjectures qu'ils avaient établies.

3.6 Développement de la théorie à partir des quinze conjectures émises par les élèves

Nous avons remarqué que les quinze conjectures émises par les élèves de Godinne pouvaient structurer la théorie. Nous allons présenter une manière de dispenser la théorie sur les fonctions du second degré à partir de celles-ci.

Considérons d'abord la conjecture 5 : *Nous ne sommes plus dans des graphiques en ligne droite mais en parabole.*
Celle-ci peut s'interpréter de la manière suivante : dans les graphiques trouvés, on quitte l'univers des droites. Vu comme ça, la conjecture est facile à prouver. Avec une bonne part d'implicite, les échelles sur les deux axes sont linéaires. Par contre, on ne peut être sûr à ce stade que, à part pour $a = 0$,

tous les graphiques seront des paraboles. On pourra le faire lorsqu'on écrira $ax^2 + bx + c$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$, et lorsqu'on aura établi le lien entre une parabole de base et ses images pour une translation quelconque ou une compression quelconque de direction parallèle à $0x$ ou à $0y$.

Nous constatons que la conjecture 14, à savoir : $y = x^2 + c$ *est une courbe croissante et* $y = -x^2 + c$ *est une courbe décroissante,* est uniquement un problème de vocabulaire qui peut être réglé dès le début.

Puis, les élèves peuvent se convaincre de la non-véracité de la conjecture 7 qui disait que b *fait varier l'élargissement de la courbe*. Pour cela, on peut établir la stratégie de recherche suivante : fixer a et c et faire varier b. On leur donne alors une série d'exemples qui illustrent cette stratégie. Nous pouvons par exemple leur donner la série suivante :

- $y = 2x^2 + 0x + 1$
- $y = 2x^2 + 1x + 1$
- $y = 2x^2 + 2x + 1$
- $y = 2x^2 - 2x + 1$

On peut constater que les courbes obtenues ont même la ouverture. Peut-on, ici, aller au-delà de la constatation ? C'est effectivement difficile. En effet, montrer que quand b varie l'ouverture de la courbe varie également, revient à montrer la contraposée. C'est-à-dire que nous devons montrer que quand on garde la même ouverture, cela implique que b est invariable. Lorsqu'on considère les courbes du type $y = ax^2$, on garde la même ouverture si nous leur appliquons des translations. Or, quand nous translatons de telles courbes, leur expression analytique est alors de la forme $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette dernière expression est équivalente à $y = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$. Et nous constatons alors que le "b", c'est-à-dire le coefficient associé à x a changé. Et donc, garder la même ouverture pour les paraboles ne signifie pas que b reste invariable. Par conséquent, nous avons la preuve que le paramètre b ne fait pas varier l'ouverture de la parabole.

Ensuite, la première chose à faire est de traiter le sens de l'équation de la courbe. Pour ce faire, nous pouvons poser aux élèves les questions suivantes :

- Le point $(33, 1080)$ appartient-il à la courbe d'équation $y = x^2$?
- Le point $(0, 1000)$ appartient-il à la courbe d'équation $y = x^2 + 999$?

A ce moment, ils sont capables de répondre à la question : le point $(0, c)$ appartient-il à la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$? Ils peuvent ainsi valider la deuxième conjecture établie.

En relation avec ceci, nous pouvons leur poser la question : combien de points d'intersection avec l'axe des y une courbe peut-elle avoir ? Nous avons pour cela les conditions $y = ax^2 + bx + c$ et $x = 0$, ce qui conduit à une valeur unique pour y, soit c.

La sixième conjecture : *les courbes* $y = x^2 + bx$ *passent par les points* $(-b, 0)$ *et* $(0, 0)$, peut être également validée puisqu'il suffit alors pour les élèves de vérifier que les points appartiennent à la courbe.

Une fois ceci établi, les élèves sont à ce moment en mesure de prouver et valider la quinzième conjecture : *si* $b = 0$, *la parabole sera à égale distance du côté négatif de l'abscisse et du côté positif de l'abscisse.*
Si $b = 0$, l'équation devient : $y = ax^2 + c$. Les élèves peuvent alors montrer que :

"(x_0, y_0) appartient à la courbe" $\Longleftrightarrow$ "$(-x_0, y_0)$ appartient à la courbe".

Grâce au sens de l'équation de la courbe, ils peuvent écrire :

$$y_0 = ax_0^2 + c \Longleftrightarrow y_0 = a(-x_0)^2 + c = ax_0^2 + c$$

Ils rencontrent ainsi pour la première fois la parité de ces courbes du second degré.

Dans le cadre des fonctions du type $y = ax^2 + c$, nous pouvons attirer l'attention des élèves sur les propriétés géométriques de la parabole. Nous pouvons notamment leur faire remarquer la présence d'un axe de symétrie qui est l'axe des y pour ces fonctions.

Dans la foulée de ceci, nous pouvons traiter la quatrième conjecture : *pour dessiner la même parabole vers le bas, il suffit de remplacer a par son opposé.* Pour aider les élèves à valider cette affirmation, nous pouvons leur proposer l'activité suivante : parmi les équations suivantes, lesquelles représentent deux paraboles symétriques par rapport à l'axe des x ?

- $y_1 = -2x^2 + 3x - 1$
- $y_2 = 2x^2 + 3x - 1$
- $y_3 = 2x^2 - 3x - 1$
- $y_4 = 2x^2 - 3x + 1$

Les élèves peuvent alors constater que $y_4 = -y_1$, c'est-à-dire que pour ces deux courbes la symétrie est bien présente.
D'une manière générale, nous pouvons prendre deux courbes $y_1 = f(x)$ et

$y_2 = -f(x)$. Le point (x, y_1) appartient à la première courbe et le point (x, y_2) appartient à la seconde. Or $(x, y_2) = (x, -y_1)$, et donc les points (x, y_1) et (x, y_2) sont symétriques par rapport à l'axe des x. Cette validation utilise de nouveau la signification de l'équation de la courbe.

Les conjectures 11 et 12 peuvent également être validées assez tôt dans le développement de la théorie.
Nous commençons par traiter la conjecture 11 : *plus a va être grand, plus la courbe va être pointue. Plus a va être petit, plus la courbe va être plate.*
Nous pouvons tout d'abord demander aux élèves de formuler la conjecture de manière correcte. En prenant la courbe $y = x^2$, les élèves établissent que si le coefficient du x^2 augmente, c'est-à-dire si a augmente, la courbe subit un étirement.
Nous pouvons alors passer à l'étape de validation.
Prenons la courbe $y = x^2$. Par la formule d'étirement, nous avons $x' = x$ et $y' = ay$. Comme $y = x^2$, nous avons $\frac{y'}{a} = x'$. Ce qui est équivalent à $y' = ax'^2$. La courbe étirée a cette équation, ce qui est une preuve que a est "le coefficient qui étire".

En ce qui concerne la conjecture 12, les élèves font référence à la translation verticale de la courbe, sans toutefois employer ce mot. Ils disaient : *c fait glisser la parabole sur l'axe des y suivant le signe de c (monter ou descendre).*
Il faut donc dans un premier temps affiner leur vocabulaire.
Ensuite, nous pouvons passer à la validation. De nouveau, prenons la courbe $y = x^2$ comme courbe de référence. Par la formule de translation, nous avons que $x' = x$ et $y' = y + c$. Comme $y = x^2$, nous avons $y' - c = x'^2$ et donc $y' = x'^2 + c$. Nous pouvons donc conclure que c est le paramètre qui nous permettra d'effectuer une translation verticale.

Une autre conjecture émise par les élèves concernait les intersections avec les axes des x et des y. Elle était formulée de la façon suivante : *il y a trois intersections : deux racines et une ordonnée.*
Nous commençons tout d'abord par faire des précisions au niveau du vocabulaire. Nous rappelons aux élèves que les intersections avec l'axe des x sont appelées les racines de la fonction.
La question de l'intersection avec l'axe des y a déjà été réglée lors du traitement de la deuxième conjecture.
Il reste alors à trouver les racines. Nous pouvons alors leur poser la question suivante : combien de points d'intersection avec l'axe des x une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ peut-elle avoir ? Ils ont alors les conditions suivantes : $y = ax^2 + bx + c$ et $y = 0$, ce qui est équivalent à $ax^2 + bx + c = 0$. Ils

peuvent résoudre cette équation à l'aide de la complétion au carré, pourvu que celle-ci ait été travaillée préalablement, par exemple à l'occasion de la recherche du centre d'un cercle précisé par son équation.

Nous pouvons alors traiter la conjecture suivante : *c est le sommet de la courbe.* Nous pouvons à l'aide d'exemples montrer aux élèves que ce n'est pas le cas. La question est alors de savoir comment trouver le sommet de la courbe. Mais, pour cela, il faut d'abord savoir ce qu'est le sommet. Ils utiliseront sans doute les termes de "point le plus haut" et de "point le plus bas". Mais, c'est aussi le point d'intersection de la courbe avec l'axe de symétrie. Nous pouvons alors pour illustrer cela, leur poser la question : quelle est la position du sommet par rapport à l'axe de symétrie ? Etant donné qu'ils ont travaillé les transformations de la courbe $y = x^2$, notamment les translations et les dilatations, mais qu'ils savent aussi transformer la courbe $y = ax^2 + bx + c$ sous la forme $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$, ils pourront déterminer la position de l'axe de symétrie et donc par conséquent l'abscisse du sommet. Il suffit alors de remplacer l'abscisse par sa valeur dans l'équation pour trouver l'ordonnée du sommet.

Ensuite, nous pouvons traiter avec les élèves la conjecture 9 qui était formulée de la manière suivante : *quand a et b sont fixés, les paraboles sont sur une même abscisse et ont la même forme.*
Il y a deux choses à considérer dans cette affirmation.

- Quand a est constant, toutes les paraboles sont isométriques. Mais comment peuvent-ils le prouver ? Nous allons pour cela leur proposer de partir des courbes d'équations $y = ax^2$ et leur demander de montrer par quelles transformations (translations) ils peuvent arriver à $y = ax^2 + bx + c$.
- Nous leur demandons de préciser ce que signifie "les paraboles sont sur la même abscisse". En fait ce sont les sommets qui se trouvent sur la même abscisse. Nous pouvons alors poser la question : "quelle est cette abscisse ?"

Pour terminer, il reste à considérer la première conjecture reprise dans la liste : *quand b est positif, la parabole est à gauche de l'axe des y. Quand b est négatif, la parabole est à droite de l'axe des y.* Nous pouvons tout d'abord leur demander de préciser leurs propos. Que signifie pour eux "parabole à gauche", "parabole à droite" ? Et, il faut également insister sur le fait que cela n'a pas de sens puisque le domaine des fonctions du second degré est $\mathbb{R}$. Ils diront alors que c'est le sommet ou l'axe de symétrie de la parabole qui

est situé à gauche ou à droite de l'axe des y.
Nous leur proposons ensuite une activité de vérification de la conjecture et ceci dans deux cas : lorsque $a > 0$ et lorsque $a < 0$. En prenant quelques exemples, ils constateront très vite que ce n'est pas le cas. De plus, ils pourront même corriger en disant que a et b décident tous les deux de la position du sommet ou de l'axe de symétrie de la parabole par rapport à l'axe des y. Comme l'axe de symétrie de la parabole est défini par $x = \frac{-b}{2a}$, on peut montrer que ce rapport peut rester constant si a et b sont multipliés ou divisés par un même coefficient. On peut également montrer que ce rapport peut être rendu plus grand ou plus petit par rapport à sa valeur de départ, ce qui entraînera un déplacement de l'axe de symétrie vers la droite ou vers la gauche respectivement. Ce rapport peut être rendu positif et ainsi, l'axe de symétrie sera à droite de l'axe des y et s'il est rendu négatif, l'axe de symétrie se trouvera de côté gauche de l'axe des y.

Dans nos expériences, nous nous appuyons sur les transformations géométriques pour en déduire les effets sur l'expression analytique. Par contre, dans l'enseignement habituel, on travaille d'abord les transformations algébriques et puis on les interprète géométriquement, ce qui est à notre avis mettre la charrue avant les boeufs.
Nous avons pu le présenter de cette manière grâce à la calculatrice.

Chapitre 4

Expérimentation au Collège Saint-Michel de Bruxelles

Les mêmes questions ont été proposées à des classes d'une vingtaine d'élèves. Comme il s'agit d'un enseignement effectif, nous n'avions pas toute latitude au niveau du choix de la méthodologie d'observation : il s'agissait plus d'enseigner que d'expérimenter. Nous avions décidé d'observer tous les groupes et nous passions régulièrement d'un groupe à l'autre. Nos interventions se limitaient à demander des précisions, à leur demander de raconter ce qu'ils faisaient, à l'aide de la caméra, pour avoir le cheminement complet de leur recherche.
Pour pallier les inconvénients d'une observation sauvage, nous avons demandé aux élèves de consigner par écrit leurs observations.
La difficulté est d'obtenir d'eux qu'ils écrivent tout ce qui leur passe par la tête y compris les fausses conjectures.
Après, nous avons demandé à certains d'aller présenter au tableau devant les autres le fruit de leurs investigations.
Dans ce qui suit, nous relevons à la fois des propos entendus en passant près des élèves et notés par nous-mêmes, des propos écrits par eux sur leur feuille et les quelques synthèses faites au tableau et filmées.
Nous avons observé les leçons tantôt à deux tantôt à trois.

4.1 Classe de quatrième

La notion de fonction du second degré a été introduite dans le cadre de la géométrie analytique, les élèves ayant étudié la parabole comme un lieu géométrique au sens de points équidistants d'une droite appelée directrice et d'un point appelé foyer. Dans ce contexte, nous ne parlerons pas de fonctions mais de courbes d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Conjectures sur les "transformations" des courbes

En ce qui concerne les positions et les "transformations" des paraboles, les élèves s'expriment en terme de mouvement.

Ils disent que quand les paramètres a, b et c varient, la courbe peut "monter", "descendre", "se rétrécir", "s'élargir", "se déplacer vers la gauche ou vers la droite" mais certains oublient de parler des retournements lorsque a est négatif.

D'autres notent que "la courbe ne passe pas toujours par les axes des x ou des y".

Certains écrivent que la parabole $y = 2x^2+3x+4$ est "décalée par rapport à l'axe des ordonnées", ce qui peut signifier, mais nous n'en sommes pas sûrs, que l'axe des ordonnées n'est plus l'axe de symétrie.

Un groupe note que "la courbe ne passe pas toujours par un axe de symétrie". Ce qui peut vouloir dire qu'il n'y a pas toujours d'intersection avec les axes des ordonnées et/ou des abscisses ou encore que la courbe ne possède pas toujours un axe de symétrie.

Pour certains le vocabulaire fait défaut. Un élève dit que "la courbe peut être ascendante ou descendante". Un autre prétend que "si l'équation est négative, la parabole se retourne". Mais nous ne savons si par le terme équation négative, il veut parler du changement de signe du coefficient a ou du changement de signe de tous les coefficients a, b et c.

Quelques élèves donnent des relations entre les courbes. Soient les courbes $y = 3x^2 + 4x + 5$ et $y = -3x^2 + 4x + 5$. La transformation effectuée est une "symétrie centrale en $y = 5$", "une symétrie centrale de centre c". De même, "il y a une symétrie orthogonale" entre la courbe $y = 3x^2 + 4x + 5$ et la courbe $y = 3x^2 - 4x + 5$.

Un groupe d'élèves prend la courbe du second degré $y = 4x^2 + 4x$ et la droite d'équation $y = 4x$ et remarque que cette droite est tangente à la parabole. Ceux-ci précisent également que cette courbe passe par l'origine et le prouvent de manière algébrique en montrant que le couple de coordonnées $(0, 0)$ vérifie l'équation de la parabole, étant conscients que l'appartenance d'un point à une courbe signifie que les coordonnées du point vérifient l'équation de la courbe.

Conjectures sur le rôle du paramètre a

Voici les conjectures écrites par les élèves à propos du paramètre a.

- "Si a est égal à 0, nous obtenons une droite". Et certains précisent : "une droite qui ne passe pas par l'origine".

- "Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut. Si a est négatif la parabole est tournée vers le bas".
- "Le paramètre a fait varier l'ouverture de la parabole. Plus a est grand, plus la parabole se rétrécit".

Conjectures concernant le paramètre c

- "Si c est égal à zéro, la courbe passe par l'origine".
- En parlant du paramètre c, ils disent : "c'est le coefficient de translation", ou encore "l'ordonnée à l'origine".

Conjectures concernant le paramètre b

Les conjectures relatives au rôle du paramètre b sont vagues ou erronnées sauf la première. Nous avons toutefois laissé les élèves patauger et tout cela sera clarifié lors de la théorie.

- "Si b est égal à zéro, le sommet de la courbe se trouve sur l'axe des ordonnées".
- "Si b est égal à zéro, le sommet est le point $(0, 0)$".
- "Si b est négatif, la parabole est située du côté des abscisses négatives. Si b est positif, la parabole est située du côté des abscisses positives".
- "Le coefficient b est l'abscisse variable du foyer".
- "Si b est égal à zéro, nous avons une courbe dont le sommet est c".
- "Le paramètre b détermine le sommet de la parabole".

4.1.2 Deuxième activité : Trouver l'équation d'une parabole image de la parabole $y = x^2$ par une translation de trois unités vers la droite

Au cours suivant nous posons la question : *On translate de trois unités vers la droite la courbe donnée par $y = x^2$. Quelle est l'équation associée à cette courbe translatée ?*

Par tâtonnement

Pour répondre à cette question, beaucoup d'élèves procèdent par tâtonnement. En essayant d'abord de programmer $y = x^2 + 3$ ou $y = x^2 - 3$. Ils constatent alors que la courbe "monte" ou "descend" de trois unités. Ensuite, des courbes du type $y = x^2 - 3x$ ou $y = x^2 + 3x$ sont proposées. Les élèves constatent que la courbe n'est pas celle dont ils cherchent l'équation, elle est soit du mauvais côté de l'axe des x , soit trop "haute", soit trop "basse".

Ils remarquent qu'il faut en fait doubler le coefficient associé au terme du premier degré. Ils arrivent alors à l'équation $y = x^2 - 6x + 3$, courbe qui est trop "basse", mais qui "a le bon axe de symétrie", et donc il faut la "remonter" en jouant sur le paramètre c. Pour effectuer cette translation, une élève procède par très petits pas, elle augmente le terme indépendant de 1/10 à la fois. Ils trouvent alors la parabole $y = x^2 - 6x + 9$. Certains remarquent alors qu'il s'agit d'un carré parfait et écrivent l'équation de la courbe sous la forme $y = (x - 3)^2$. Un groupe va plus loin pour prouver que c'est la bonne formulation en montrant que le sommet $(3, 0)$ appartient à la parabole.

D'autres procèdent différemment. Ils essayent d'abord $y = x^2+3$. Mais, ils constatent que la courbe est placée trop haut et évoquent alors l'hypothèse que "c'est en fait le tout qui doit être au carré". Ils programment donc $y = (x+3)^2$. De nouveau, ils remarquent que ce n'est pas la courbe recherchée. Finalement, ils essayent $y = (x - 3)^2$.

Par des écritures analytiques

Dans deux groupes, un des observateurs suggère de noter un point de la première courbe (x, y) et un point de la parabole translatée (x', y'). En constatant que l'ordonnée de ces points est la même et que la nouvelle abscisse est égale à la précédente augmentée de trois et en n'oubliant pas que $y = x^2$, ils aboutissent à l'équation finale en terme de x', y', c'est-à-dire $y' = (x'-3)^2$. Ils écrivent alors, avec quelques difficultés pour certains, l'équation de la courbe avec la notation canonique d'un point courant, soit x et y : $y = (x-3)^2$. A la surprise du professeur, plusieurs élèves avaient des difficultés de reconnaître dans $y = (x - 3)^2$ la même courbe. Mais, le professeur ne s'était pas aperçu que le problème n'était pas réglé comme nous le verrons dans la section 5.3.1.

Dans les feuilles, nous avons également relevé des écritures de ce type : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$. Comme, on effectue une translation de trois unités vers la droite : $x = \sqrt{y} + 3$. Par manipulation algébrique en élevant au carré les deux membres de l'équation, ils aboutissent à l'équation $y = (x - 3)^2$.

Travail numérique au départ d'un y

Les élèves travaillent de la manière suivante. Ils veulent trouver le x qui correspond à un y donné. Pour eux, "si $y = 1$ alors $x = 4 = 1 + 3$ ou $x = 2 = |1 - 3|$". "Si $y = 4$, alors $x = 5$ ou $x = 1$". Une régularité leur apparaît et ils écrivent alors l'équation de la courbe translatée sous la forme $y = (x - 3)^2$.

Cheminement sur le graphe

En substance et par gestes, l'élève envisage un circuit comme celui de la figure suivante. Il considère le point A, sur la courbe translatée, son abscisse et lui retranche trois. Il élève ensuite au carré et propose le résultat obtenu comme ordonnée du point A.

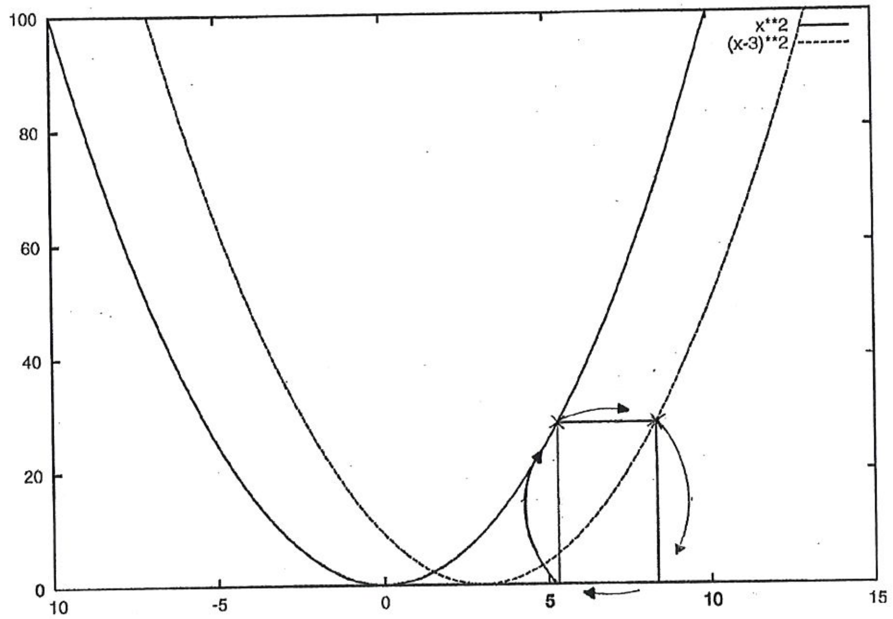


figure 4.1: Graphe de $y = x^2$ et de sa translatée

4.1.3 Troisième activité : Trouver l'équation d'une parabole qui est l'image de $y = 3x^2$ par une translation de deux unités vers la gauche

Dans la continuité, nous leur posons la question suivante : *On translate de -2 unités parallèlement à l'axe des x la parabole $y = 3x^2$. Quelle sera l'équation associée à la parabole translatée ?*

Cet exercice suscite quelques problèmes à la lecture de l'énoncé. Quand nous demandons de translater parallèlement à l'axe des x, certains élèves pensent que la courbe doit bouger verticalement de 2 unités vers le bas.

Par des écritures analytiques

La plupart des élèves travaille avec les x', y'. Mais étant donné un problème de généralisation à tous les points de la courbe, il a fallu leur faire lire

l'équation de la courbe en français en remplaçant les x et y par abscisse et ordonnée.
Cependant, une élève emploie une autre notation que celle des primes. Elle note un point de la première courbe (x_1, y_1) et un point de la courbe translatée (x_2, y_2).

Par réflexion

Une élève explique sa manière de procéder. Pour elle, le coefficient a qui est ici égal à 3, influence l'ouverture de la parabole. Or, lors de la translation, l'ouverture ne varie pas. Donc, la transformation s'opère sur les x. Comme pour un déplacement de trois unités vers la droite, nous obtenions l'équation $y = (x-3)^2$, pour translater de 2 unités vers la gauche, nous obtenons $y = (x+2)^2$. Finalement, la courbe translatée a pour équation $y = 3(x+2)^2$.

4.1.4 Quatrième activité : Retrouver les transformations géométriques subies par la courbe $y = x^2$ pour une courbe donnée

Cette activité consiste à faire le travail dans l'autre sens. Voici notre question : *Quelle transformation géométrique faut-il faire subir à la courbe d'équation $y = x^2$ pour obtenir les courbes d'équations $y = 3x^2, y = -x^2, y = 3(x+1)^2, y = 1 + 2(x-5)^2, y = -5(x-2)^2 + 6$?*

Deux problèmes principaux nous apparaissent dans la résolution.

Concernant la première transformation

Nous constatons que la première transformation pose pas mal de problèmes. Lorsque nous passons de la courbe $y = x^2$ à la courbe $y = 3x^2$, il est important de constater que c'est l'ordonnée qui est multipliée par trois. En effet, x^2 est l'ordonnée d'un point d'abscisse x. Il s'agit donc d'un étirement de coefficient trois. Le professeur suggère alors de le montrer en prenant un carré unitaire et en multipliant l'ordonnée des points par trois. Elle explique également que Descartes ne considérait pas les coordonnées d'un point comme des nombres mais comme des segments.

Le professeur donne ensuite la courbe d'équation $y = 1/2x^2$ et demande de la comparer à la courbe $y = x^2$. Les élèves constatent qu'il s'agit là d'une compression d'un coefficient $1/2$.
Toutefois, une élève fait remarquer que l'étirement de coefficient trois est aussi une compression de coefficient $1/\sqrt{3}$. Mais, la plupart des élèves ne saisissent pas cette remarque.

Concernant l'ordre des transformations

Pour le dernier exemple, un élève envoyé au tableau note les différentes transformations effectuées sur la courbe $y = x^2$ pour obtenir la courbe donnée. Cependant, il commet une erreur dans l'ordre des opérations.

4.1.5 Quelques remarques

Le professeur souligne le fait que la recherche des racines a amené la résolution d'équations du second degré avec deux méthodes différentes :

1.
$$-5(x+2)^2+6=0 \Longleftrightarrow (x+2)^2=\frac{6}{5}$$
$$x+2=+\sqrt{\frac{6}{5}} \text{ ou } x+2=-\sqrt{\frac{6}{5}}$$
$$x=+\sqrt{\frac{6}{5}}-2 \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{6}{5}}-2$$

2.
$$6-(x-2)^2=0 \Longleftrightarrow (\sqrt{6}+x-2)(\sqrt{6}-x+2)=0$$
$$\sqrt{6}+x-2=0 \text{ ou } \sqrt{6}-x+2=0$$
$$x=-\sqrt{6}+2 \text{ ou } x=-\sqrt{6}-2$$

Il subsiste encore des problèmes dans le calcul des intersections avec les axes. Notamment, pour l'intersection avec l'axe des ordonnées, il faut penser que $x = 0$ et que pour l'intersection avec l'axe des abscisses, $y = 0$. Mais, la résolution d'équations du premier degré pose encore parfois des problèmes. Par exemple, lorsque $4x = 0$ une élève propose : x peut valoir $1/4$ ou $-1/4$. La règle du produit nul n'est pas encore complètement mobilisée. En effet, un élève dit : "Si $0 = 4x(1+x)$ alors $1/4 = x(1+x)$".

4.1.6 Analyse

Dans cette classe, le travail des paraboles prises au sens géométrique du terme, semble avoir été prégnant dans l'analyse et les recherches des élèves. Ils font notamment référence à la directrice, au foyer et à l'équation de ces lieux.
Cependant, la considération des paraboles comme lieu de points au sens géométrique ne se retrouve pas beaucoup dans les conjectures que les élèves ont

établies. On peut se poser la question de savoir si c'est vraiment important. Nous avons également eu l'impression que les élèves ont une plus grande disponibilité du sens de l'équation d'un lieu dans le sens où les coordonnées de ses points vérifient l'équation.

De plus, le temps imparti à ces élèves était moindre. Nous leur donnions environ quinze à vingt minutes pour chaque activité. Nous avons donc retrouvé moins de conjectures qu'au Collège de Godinne mais les essentielles s'y trouvaient. Cependant, comme dans les deux autres classes, les conjectures qui concernent le paramètre b semblent plus difficiles à établir.

Les élèves de Saint-Michel n'évoquent pas, dans leurs conjectures, les intersections de la fonction avec les axes. Cela peut peut-être venir du fait que lors du rappel de l'étude des fonctions du premier degré, le professeur n'a pas fait allusion à la racine de la fonction contrairement à l'introduction qui avait été faite à Godinne.

En outre, nous aurions pu approfondir certaines conjectures.
Par exemple, nous aurions posé la question de savoir s'il était possible d'avoir des courbes dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des x. Mais cette question n'a pas été formulée pour ne pas interrompre la continuité du processus de recherche.

En ce qui concerne la conjecture : "Si b est égal à 0, le sommet de la courbe se trouve sur l'axe des ordonnées", nous aurions pu, dans ce cas, leur demander pourquoi. Selon le professeur, plus tard les élèves ont évoqué la translation nulle pour justifier cette conjecture.

Certains écrivent que le paramètre b détermine le sommet de la parabole. Nous pouvons nous demander comment les élèves auraient réagi si nous leur avions demandé si b était le seul coefficient qui influençait le sommet de la parabole et pourquoi.

Ils auraient également pu prouver l'affirmation selon laquelle : "si c est égal à 0, la courbe passe par l'origine. En effet, ils ont à leur disposition tous les outils nécessaires pour le faire. Localement, en sous-groupes, ils ont effectué ce travail de preuve, mais, la question n'a pas été posée de manière générale à toute la classe. Et, selon le professeur, cette conjecture allait de soi pour tous les élèves lors de la théorie.

En ce qui concerne l'activité de translation, deux obstacles apparaissent. En effet, la validation de l'équation de la courbe translatée pose problème à quelques élèves. Pour parvenir à l'équation de la courbe translatée, la difficulté réside dans la combinaison de tout ce que l'on connaît à propos de la

nouvelle et de l'ancienne courbe et des relations qu'elles ont entre elles.
De plus, les étudiants éprouvent des difficultés à écrire l'équation de la courbe avec la notation canonique d'un point courant. Nous avons même dû les inciter à traduire l'équation en mots. Les élèves s'accrochent à la notation et ne reconnaissent pas qu'il s'agit de la même courbe.

Toutefois, la notation employée par une élève, à savoir (x_1, y_1) pour un point de la courbe $y = x^2$ et (x_2, y_2) pour un point de la courbe translatée, semble meilleure a posteriori. Comme ce sont les coordonnées d'un point particulier, il est probable que cette notation pose moins de problèmes que la notation à l'aide de primes.

4.2 Classe de cinquième math quatre heures

L'objectif est d'étudier avec les élèves les fonctions du troisième degré $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les activités de recherche proposées se font à l'aide de la calculatrice et par groupe de 2 ou 4. De plus, les élèves n'ont aucune notion des dérivées.
Le professeur a d'abord rappelé aux élèves en quoi a consisté l'étude des fonctions du premier et du deuxième degré en accompagnant ses dires de dessins. Elle leur a donc rappelé qu'une fonction du premier degré $y = ax + b$ était représentée par droite croissante ou décroissante suivant le signe de a et qu'une fonction du second degré $y = ax^2 + bx + c$ était représentée par une parabole tournée vers le haut ou vers le bas suivant le signe de a.

4.2.1 Première activité : Explorer l'identité graphique des fonctions $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nous leur posons la question suivante : *Comme pour les fonctions du premier et du deuxième degré, pouvons-nous établir le nombre de représentants de cette classe de fonctions ?*

La plupart des élèves établissent qu'il y a deux types de graphes possibles. A savoir, l'un globalement croissant lorsque a est positif et l'autre globalement décroissant lorsque a est négatif.
Certains vont cependant plus loin dans leurs investigations et affirment qu'il y en a deux de plus, un pour a positif et un pour a négatif. Ces graphes possèdent deux bosses et donc deux sommets. En effet, la majorité n'ont pas perçu la différence. A la question : "Qu'est-ce qui les différencie alors ?", ils répondent que dans le cas globalement croissant ou globalement décroissant, la pente est toujours positive ou négative respectivement.

Certains observent également que si d vaut zéro, la fonction passe par l'origine. D'autres mentionnent le fait que plus a augmente, plus le graphe se rapproche de l'ordonnée. Et que a détermine le sens de la fonction.

4.2.2 Deuxième activité : Retrouver l'équation de la courbe à partir de son approximation affine et de deux de ses racines

Nous leur posons ensuite la question : *Soit l'équation* $y = x^3 + x^2 - 2x + 5$. *Que se passe-t-il lorsque nous faisons un "zoom in" un certain nombre de fois autour du point d'intersection avec l'axe des ordonnées ?*

Ils constatent que comme d est l'ordonnée à l'origine, le point d'intersection avec l'axe des y est le point $(0, 5)$. Après quelques manipulations à l'aide de la calculatrice, les élèves observent qu'ils obtiennent une droite ou un segment de droite.

Nous embrayons alors sur l'activité de recherche qui est reliée à la question suivante : *Déterminer la courbe du troisième degré telle qu'elle devienne presque une droite d'équation* $y = 2x + 3$ *autour de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées et avec les racines égales à -2 et 1 ?*

Plusieurs stratégies de résolution sont d'abord mises en place.
Tous les élèves voient que l'ordonnée à l'origine de la courbe est égale à trois. Mais, c'est à ce moment que les méthodes diffèrent.

Utilisation des deux racines uniquement

Certains utilisent les deux racines données de la courbe. Ils obtiennent un système de deux équations, une pour la racine $(1, 0)$ et l'autre pour $(-2, 0)$, mais à trois inconnues a, b, c. Ce qui pose problème et ils constatent qu'ils sont bloqués.

Lien avec l'activité qui a introduit cette question

Une partie de la classe fait un parallèle avec ce qu'ils viennent d'observer concernant le "zoom". Ils remarquent que quand on "zoome" la courbe $y = x^3 + x^2 - 2x + 5$ autour du point d'intersection avec l'axe des ordonnées, la droite a pour équation $y = -2x + 5$. Donc, ici, $cx + d = 2x + 3$. Ensuite, certains prennent la courbe $y = x^3 + x^2 + 2x + 3$ et disent : "Voilà la courbe recherchée". Après réflexion, quelques uns remarquent que cette courbe ne vérifie pas la condition des deux racines et d'autres prétendent qu'il y a une infinité de courbes qui donnent $y = 2x + 3$ après zoom.

En conséquence, quelques élèves proposent une généralisation. Donc, la courbe recherchée est de la forme $y = ax^3 + bx^2 + 2x + 3$. Les élèves doivent alors prendre en compte les deux racines et résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Ils obtiennent alors l'équation de la courbe recherchée : $y = -7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3$.

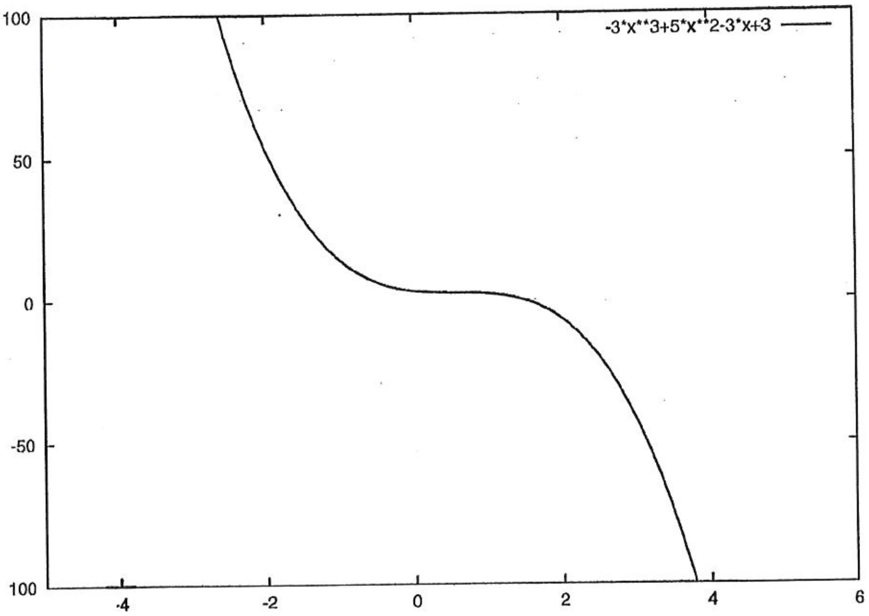
La factorisation

L'activité de recherche étant proposée en fin de cours, nous leur disons qu'ils présenteront leurs résultats au prochain cours. Ainsi, un élève propose ses résultats. Il propose la solution que son cousin lui a donnée. Il y a trois racines pour une telle courbe, il faut donc trouver la troisième. Il écrit alors que la courbe a la forme : $y = (x - 1)(x + 2)(x + k)$, qui est la forme factorisée. En distribuant et en utilisant le point $(0, 3)$ qui appartient à la courbe, il trouve $k = -3/2$. Donc, en développant, la courbe a l'équation $y = x^3 - 0.5x^2 - 3.5x + 3$. La troisième racine est $-3/2$, ce qui ne vérifie le graphe que les élèves avaient fait puisqu'elle devait être entre -1 et 0. Et, elle ne respecte pas non plus la condition du zoom $y = 2x + 3$. Mais visiblement, $y = (x - 1)(x + 2)(x + k)$ n'est pas la seule courbe qui passe par les trois points $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(-2, 0)$ car la courbe trouvée précédemment $y = -7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3$ passe aussi par ces trois points.
En correspondance avec la factorisation d'une fonction du second degré à l'aide des racines, les élèves établissent la forme factorisée de la courbe du troisième degré : $y = a(x - 1)(x + 2)(x + k)$. Ils développent ensuite cette expression pour la ramener à une équation du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et obtiennent $y = ax^3 + x^2(ak + a) + x(ak - 2a) - 2ka$. Il leur reste donc à utiliser l'équation de la droite obtenue après zoom $y = 2x + 3$. Etant donné qu'ils connaissent le coefficient de x et le terme indépendant, il leur suffit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues a et k. Ils obtiennent finalement $a = -7/4$ et $k = 6/7$, ce qui confirme la solution que d'autres trouvent.

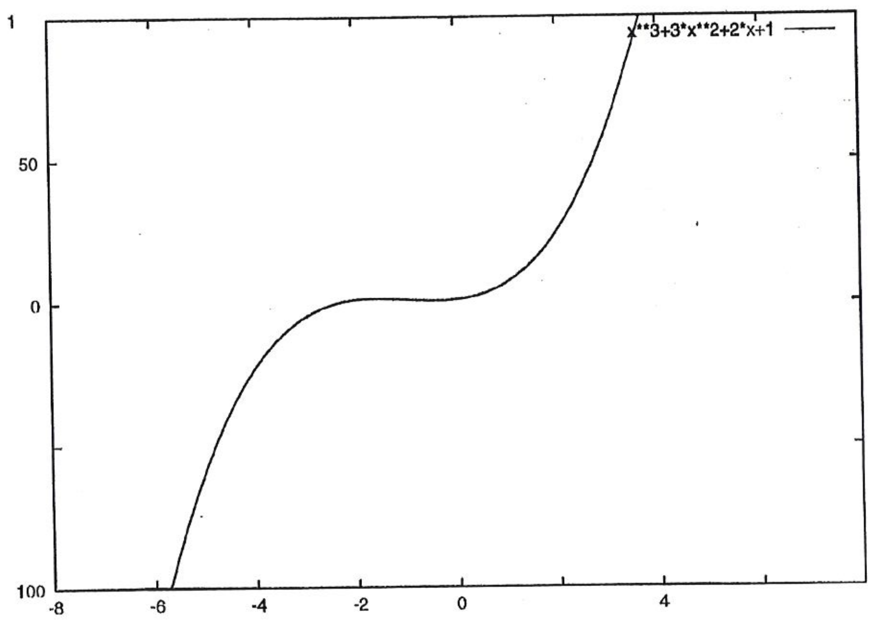
4.2.3 Troisième activité : Etablir une stratégie pour déterminer l'allure d'une courbe du troisième degré

Pour terminer, nous leur demandons d'établir une stratégie, la plus rapide possible, qui permet de classer une équation particulière du troisième degré dans l'un des quatre cas qu'ils avaient établis comme représentants de cette classe de fonctions.

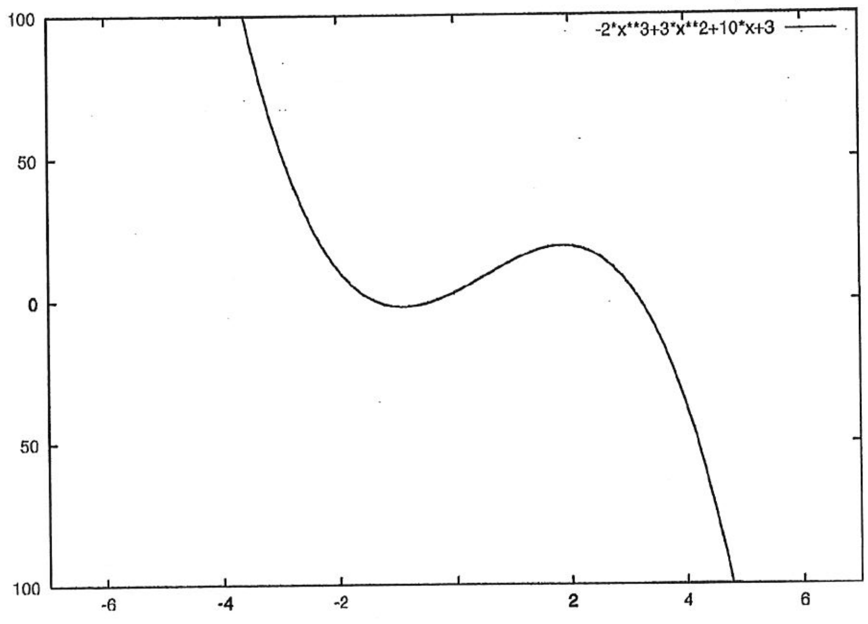
Les quatre représentants sont les suivants :
– 1. a négatif et fonction globalement décroissante



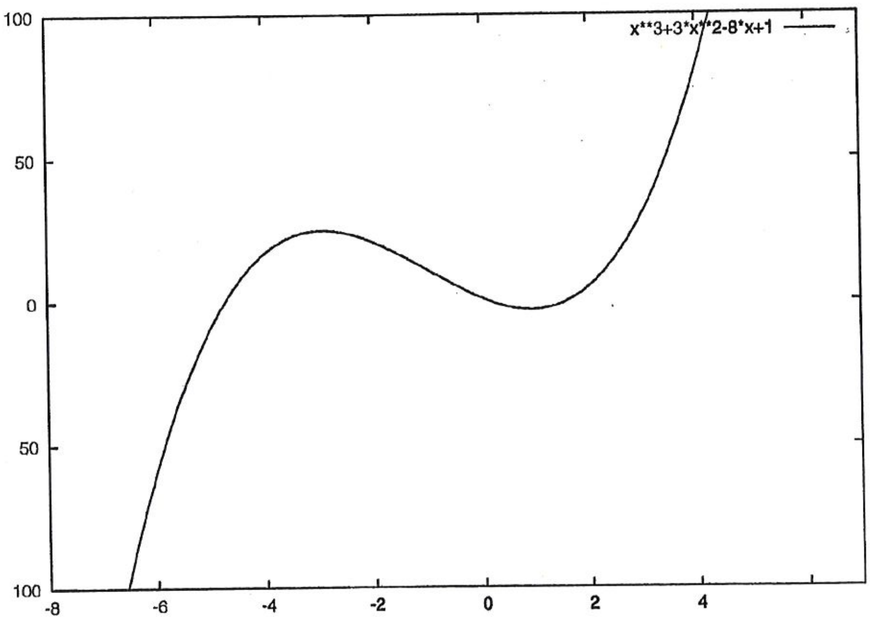
– 2. a positif et fonction globalement croissante



– 3. a négatif et fonction à deux bosses



– 4. a positif et fonction à deux bosses



L'accent est donc mis sur la forme de la courbe et on ne donne pas de précision sur les critères de classement comme la position de la courbe par rapport aux axes.

Pour cela, nous leur donnons une série d'exemples de courbes à examiner.
1. $y = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$
2. $y = -2x^3 + 3x^2 - x - 1$
3. $y = 3x^3 - x^2 - x - 1$
4. $y = 3x^3 + x^2 - x - 1$
5. $y = -x^3 - x^2 + x + 1$
6. $y = -x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
7. $y = x^3 + 7x^2 + x + 1$
Ils doivent ensuite établir une généralisation.

Le jeu sur les signes des paramètres est significatif du choix didactique du professeur.

Au départ, leur stratégie consiste uniquement à examiner les signes des coefficients. Mais, certains pensent alors à réutiliser ce qui précède. Ils se rappelent que $cx + d$ donne l'équation d'une droite. Le professeur leur demande alors : "Quelle droite ?", ils répondent qu'il s'agit de la droite obtenue en zoomant autour du point d'intersection avec l'axe des y, de la droite tangente à la courbe au point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
Nous constatons donc que très peu d'élèves établissent un lien entre les résultats de l'exercice précédent et ce qui leur est demandé ici.
Ils affirment tous, dès le départ, que le signe du coefficient de x^3 permet de dire si la courbe monte ou descend.

A partir de là, voici les différentes conclusions que nous avons retrouvées d'une feuille à l'autre :

- Si a, b et c sont de même signe alors nous sommes dans le cas 1 ou 2 sauf si $|b| > |c|$.

- Le signe de a détermine le sens, c'est-à-dire si a est positif, on a le cas 2 ou 4 et si a est négatif on a le cas 1 ou 3.

- Le terme indépendant d détermine si la courbe passe ou non par (0,0). S'il n'y en a pas, la courbe passe par l'origine.

- Si les coefficients de x^3 et x^2 sont de même signe, nous avons le cas 1 ou 2, sinon 3 ou 4. Si a est positif et b aussi, alors nous avons le cas 2 et si b est négatif, le cas 4. Si a est négatif et b est négatif, alors nous avons le cas 1, et si b est positif, le cas 3.

- Si c et d sont négatifs, nous obtenons le cas 4 et s'ils sont positifs, le cas 2.

- Si c est négatif et d positif alors, nous avons le cas 4, et le cas 2 si c est positif et d négatif.

- Si a, b et c sont de même signe, nous retrouvons les cas 1 ou 2 et s'ils sont de signes différents les cas 3 ou 4.

- Si $|b| < |c|$, nous sommes dans le premier ou dans le deuxième cas.

- Si a est négatif et c positif, alors nous obtenons le cas 3. Car si c est positif alors la droite, qui est le résultat du zoom autour du point d'intersection avec l'axe des y, est montante et donc nous sommes dans le cas 2 ou 3 et si c est négatif cette droite est descendante et donc nous retrouvons le cas 1 ou 4.

- Comme a détermine si la fonction est montante ou descendante et en se basant sur l'inclinaison de la droite, nous pouvons trouver le modèle de la courbe. Par exemple, si a est négatif et que la droite est descendante, nous sommes dans le cas 1.

- Le coefficient a détermine l'allure générale de la fonction. Le coefficient c selon qu'il est positif ou négatif détermine si la droite est croissante ou décroissante. Et, la combinaison des deux permet de retrouver l'allure générale d'une fonction du troisième degré.

- Les deux termes des quatre premiers exemples excluent la courbe de type 2.

- Certains utilisent un tableau suivant le signe du coefficient de x^3 et la pente de la droite pour établir leur stratégie.

coefficient de x^3	pente de la droite	
	+	-
+ -	globalement croissante décroissante à deux bosses	croissante à deux bosses globalement décroissante

- Si a et c ont même signe, nous retrouvons le cas 1 ou 2 et s'ils sont de signe opposé, nous retrouvons le cas 3 ou 4. De plus, nous pourrons les différencier suivant le signe de a.

- Pour avoir les modèles 3 ou 4, il faut un nombre impair de signes, sans compter le coefficient de x^3 et le terme indépendant. Mais, ils constatent que cela ne marche pas toujours.
  Les cas 1 et 3 sont liés par une dilatation ou une compression, de même que les cas 2 et 4.

- Si les coefficients sont plus grands que 1 ou plus petits que -1, il y a changement.

Quelques problèmes de vocabulaire apparaissent dans cette activité. Certains parlent de racine de a et de racine de x. Vu le contexte, nous pouvons supposer qu'ils veulent parler des coefficients. D'autres emploient les termes de courbes positives et négatives. D'autres encore, parlent de x positifs ou négatifs au lieu de parler des coefficients de x.

4.3 Classe de cinquième math six heures

L'objectif consiste à étudier la classe des fonctions du troisième degré. Les activités relatives à cette notion se font à l'aide de la calculatrice et les élèves n'ont aucune notion sur les dérivées. Ils travaillent par 3 ou 4.
Nous contrôlons d'abord que les élèves connaissent la forme générale d'une courbe du troisième degré. Ils donnent directement l'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

4.3.1 Activité préparatoire

Nous leur proposons de prendre un exemple de courbe du troisième degré et de l'agrandir autour du point d'intersection avec l'axe des ordonnées à l'aide de la commande "zoom in". Qu'observent-ils alors ? Qu'ils obtiennent une droite ou un segment de droite.

4.3.2 Première activité : Trouver l'équation d'une courbe du troisième degré à partir de son approximation affine et de deux de ses racines

Nous leur proposons l'activité de recherche suivante : *Est-il possible de déterminer la courbe du troisième degré telle qu'elle devienne presque une droite d'équation $y = 2x + 3$ autour de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées et avec les racines égales à -2 et 1 ?*

Résolution du problème

Une réflexion nous est faite :" Nous pouvons zoomer en arrière à partir de la droite".

Certains dessinent d'abord la droite. Puis ils prennent la courbe $y = x^3 + x^2 + 2x + 3$. Ils constatent alors que la droite et la courbe se superposent après zoom.

D'autres constatent que d doit être égal à 3. Ils écrivent alors un système à l'aide des racines. Mais c'est un système de deux équations à trois inconnues. Ils ne peuvent donc pas aller plus loin.

Mais un groupe propose : $y = ax^3 + bx^2 + 2x + 3$. $2x + 3$ comme partie affine car la courbe et la droite se superposent. Elles ont le même point d'intersection (0,3) et la même pente.
Ils établissent alors un système de deux équations à deux inconnues a et b à l'aide de deux racines (1,0) et (-2,0). Ils obtiennent l'équation suivante : $y = -33/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3$.

Mais les autres ne sont pas d'accord, car quand ils dessinent la courbe, ils remarquent qu'elle n'a pas -2 comme racine. Après réflexion, le groupe découvre qu'il s'agit d'une erreur de calcul et donne la bonne expression : $y = -7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3$.

La courbe devient-elle une droite ou non ?

Suite à cela, une discussion est soulevée. La courbe devient-elle localement un segment de droite, ou la courbe ne devient-elle jamais un segment de droite ? La courbe et la droite n'ont qu'un point en commun ?
Voici les réflexions que les élèves ont faites à ce sujet.
Non, ça ne peut pas devenir un segment de droite car il y a la partie avec x^3 et x^2. Il faudrait que $-7/4x^3 - 13/4x^2$ soit égal à 0. Or, cela n'est possible qu'en $x = 0$. Cette expression n'est pas nulle dans un intervalle autour de

$x = 0$. C'est donc que la calculatrice nous a trompés. Nous voyons un segment mais c'est un morceau d'une courbe.

Une élève propose une solution en termes d'égalité entre deux expressions algébriques considérées comme équations en x.

$$-7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3 = 2x + 3$$
$$\iff x^2(-7/4x - 13/4) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = -13/7$$

Nous n'avons pas d'intervalle sur lequel la courbe et la droite se superposent car nous avons deux valeurs précises.

Le professeur intervient et dit que l'égalité peut également être posée en terme d'identité de fonctions c'est-à-dire $-7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3 \equiv 2x + 3$
Le professeur demande de vérifier cela à l'aide des tableaux numériques affichés par la calculatrice.
Les élèves affirment alors : "Il n'y a pas égalité, car en regardant le tableau numérique que nous propose la calculatrice, avec un pas de $1/100$, nous pouvons constater une différence de $4/1000$".

Les élèves disent que la différence est donc petite mais elle existe et elle vient des termes $-7/4x^3 - 13/4x^2$. Mais pour des valeurs de x très proches de 0, cette expression est quasi nulle, est négligeable. En effet, si $x = -0.01$, alors la valeur de cette expression est 0.004.
La calculatrice ne fait plus de différence et la courbe se comporte comme un segment de droite dans le voisinage de 0.
La différence algébrique dans les deux premiers termes n'est donc pas visible à l'oeil nu.

Position de la droite par rapport à la courbe

Ils prétendent alors que la droite est en fait tangente à la courbe en un point, le point (0,3).

Qu'est-ce qui permet de dire que la droite est tangente à la courbe ?
Certains disent que c'est parce qu'il n'y a qu'un point commun. Mais ils constatent très vite qu'il y en a deux.
Peut-on alors conserver le statut de tangente ?
Oui, la droite est tangente à une partie de la courbe.
Donc, le nombre de points communs ne permet pas de dire si la droite est tangente ou non.

Une élève intervient et dit que la droite doit frôler la courbe c'est-à-dire la toucher mais sans la traverser.
Certains prétendent, de plus, qu'il y a tangente lorsqu'il y a un changement de direction. Mais, nous ne savons pas quel sens donner à cette phrase.

4.3.3 Deuxième activité : Recherche de la troisième racine de cette courbe par la factorisation

Nous reprenons la courbe de la première activité : $y = -7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3$ *dont nous connaissons deux racines -2 et 1. Or, une telle courbe possède trois racines. Quelle est alors la troisième ?*

Nous savons qu'elle se situe entre 0 et 1. Avec la calculatrice, ils trouvent $x = -0,857$ mais c'est un résultat approximatif.
Il faut donc résoudre $-7/4x^3 - 13/4x^2 + 2x + 3 = 0$ mais c'est difficile car ils n'ont pas de méthode à disposition.
Quelques-uns proposent d'utiliser la division euclidienne par $x - 1$ pour factoriser. Le professeur les décourage en leur disant que ce n'est pas rentable dans ce cas.
En se rappelant alors la forme factorisée d'une équation du second degré, les élèves établissent la forme factorisée pour une équation du troisième degré. La courbe a donc la forme factorisée suivante :

$$y = -7/4(x - 1)(x + 2)(x - k).$$

Comme le point $(0, 3)$ appartient à la courbe, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la courbe et les élèves obtiennent que la troisième racine vaut : $k = -6/7$.

4.3.4 Troisième activité : Explorer l'identité graphique des fonctions $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nous leur présentons une autre activité de recherche : *Trouver les formes de graphiques qui peuvent représenter les fonctions du troisième degré.*

Plusieurs élèves établissent un classement par rapport aux axes et optent pour quatre formes.

- 1. a négatif et fonction globalement décroissante
- 2. a positif et fonction globalement croissante
- 3. a négatif et fonction à deux bosses
- 4. a positif et fonction à deux bosses

Ils expliquent qu'il y a deux bosses lorsque le coefficient du x^2 prend plus de poids, mais ils n'évoquent pas les signes des coefficients.
Mais, beaucoup ne voient que deux cas car ils ne font pas de différence entre les cas 1 et 3 et 2 et 4.

Une élève explique cependant que les deux premiers cas sont semblables à une symétrie "horizontale" près et que les deux derniers cas sont également semblables mais à un symétrie "verticale" près. Elle ne voit donc que deux représentants. Il y a deux figures possibles à une symétrie axiale près.

Certains élèves proposent encore un autre classement, en considérant la position de la courbe par rapport aux deux axes, et le nombre de racines. Ils trouvent alors huit représentants : quatre lorsque la courbe a une racine, deux lorsqu'elle en a deux et deux lorsque la courbe a trois racines.
Le nombre de représentants dépend donc des critères de classement.

Nous pouvons remarquer qu'ils ne tiennent pas compte de la partie affine pour déterminer l'allure des représentants de la classe des fonctions du troisième degré. Ils ne transfèrent pas les résultats obtenus lors de la première activité.

Recherche sur les courbes possédant deux racines

Nous leur demandons de trouver des exemples de courbes du troisième degré qui possèdent deux racines. Plusieurs propositions sont faites.

- $y = x^3 + x^2 \Longleftrightarrow y = x^2(x+1)$. Pour trouver les racines, il faut donc résoudre l'équation

$$x^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

  Le professeur fait remarquer aux élèves qu'il y a erreur dans l'application de la règle du produit nul. L'accolade signifie "et", mais x ne peut pas valoir à la fois -1 et 0. La bonne expression est : $x = 0$ ou $x = -1$.

- Un autre élève propose : $y = -9x^3 + 8x^2$. Nous observons la même erreur du "et" à la place du "ou" pour la solution.

Le professeur intervient et annonce qu'il s'agit d'une racine double, ce qu'aucun élève ne savait. En fait, il y a trois racines dont deux sont les mêmes.

Une élève propose l'équation $y = 1/8x^3 + x^2 + x$. Elle doit donc résoudre l'équation $1/8x^3 + x^2 + x = 0$ pour trouver les racines. Elle met donc x en évidence et applique la règle du produit nul en faisant la même erreur ("et" à la place de "ou") que les autres. Elle arrive alors à $x = 0$ ou $1/8x^2+x+1 = 0$. Il lui reste donc une équation du second degré à résoudre. Mais elle se rend compte de ce que $b^2 - 4ac$ est strictement positif et donc pour cette partie, elle a deux racines différentes. Au total, elle a donc trois racines distinctes et pas deux comme demandé.

4.3.5 Quatrième activité : Etablir une stratégie pour déterminer l'allure d'une courbe du troisième degré

Pour terminer, nous leur demandons d'établir une méthode expéditive pour donner l'allure d'une fonction du troisième degré dès que l'on voit son expression. L'allure est choisie parmi les quatre suivantes :

- 1. a négatif et fonction globalement décroissante
- 2. a positif et fonction globalement croissante
- 3. a négatif et fonction à deux bosses
- 4. a positif et fonction à deux bosses

Pour cela, nous leur proposons d'examiner d'abord quelques exemples :

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$
2. $y = -2x^3 + 3x^2 - x - 1$
3. $y = 3x^3 - x^2 - x - 1$
4. $y = 3x^3 + x^2 - x - 1$
5. $y = -x^3 - x^2 + x + 1$
6. $y = -x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
7. $y = x^3 + 7x^2 + x + 1$

et ensuite de généraliser.
Mais, les observations se sont terminées ici.

Dans cette activité, le professeur visait le travail de la sommation graphique. C'est-à-dire la sommation du graphique relatif à la partie non-affine et celui relatif à la partie affine.
Cela aurait mieux mis en évidence le caractère négligeable de la partie non-affine pour les x proches de 0.

Conclusion et perspectives

Avec l'aide de la calculatrice et les problèmes qu'elle suscite, nous avons examiné la faisabilité d'une recherche par les élèves.
Il en résulte la difficulté de motiver une validation autre que pragmatique.
Une des pistes à envisager est de faire coller la théorie à l'étude des conjectures établies par les élèves.

En deuxième lieu, en se rapprochant des difficultés d'A. Sierpinska et en évaluant les activités possibles dans les classes, nous avons remis en cause le caractère épistémologique des difficultés.

Nous pouvons ici avancer l'affirmation que certains types de difficultés peuvent progressivement se résoudre : les difficultés relatives à l'identification d'une variation, relatives à la distinction entre variables dépendantes et indépedantes, relatives à la distinction entre les grandeurs variables et les variables numériques, relatives à la distinction entre une fonction et ses représentations.
Cependant, nous pouvons formuler la conjecture que des difficultés subsisteront ; notamment, l'approche des variations lorsque le facteur temps n'est pas présent dans l'énoncé du problème.

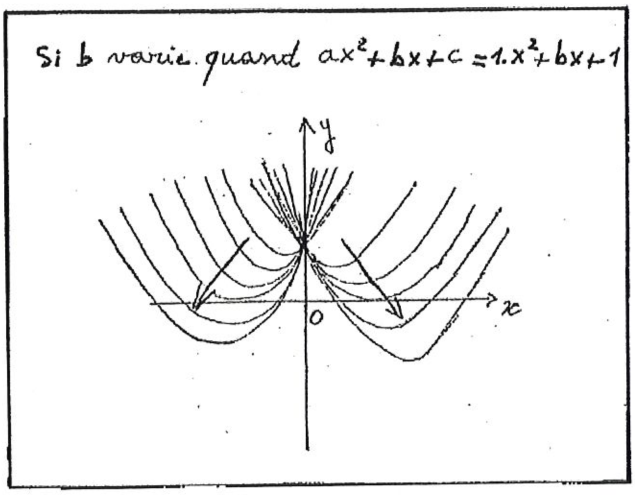
Au stade où se termine mon étude, deux questions restent posées qui mériteraient aussi une observation.
Dans la perspective d'un travail ultérieur, il resterait à tester le résultat de la mise en oeuvre d'activités sur la quantité de difficultés dénombrées.
Il serait également intéressant d'analyser au travers de documents scolaires, les méthodes de l'enseignement des fonctions actuellement. Voici quelques critères qui pourraient guider ce travail : le professeur réserve-t-il une place importante aux variations de fonctions ? Travaille-t-il la lecture et l'interprétation graphique avec les élèves ? Propose-t-il des exercices qui nécessitent l'utilisation des différentes représentations des fonctions et d'autres qui permettent de passer de l'une à l'autre ? Demande-t-il aux élèves de construire le graphique de fonctions sans passer par l'expression analytique ?

Annexes

Question 1

Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Expliquez ce dessin en répondant aux questions suivantes :

- Il y a un point commun à toutes les courbes : lequel et pourquoi ?
- Les courbes ont-elles toutes la même forme ? Pourquoi ?
- Quelle signification donner aux flèches qu'il y a sur le schéma, sachant que ce dessin a été obtenu en attribuant différentes valeurs à b ? Expliquez.



Réponses des élèves :

7.1) le point commun est (0;1) car c'est l'ordonné à l'origine de chacune des courbes car c'est le point (0;c) ✓

7.2) Elles non pas la même forme car elles s'élargissent, parce qu'il y a une affinitée vertical de coefficient a et que comme a est a ~~...~~ ?, il y a un effet d'étirement.

7.3) Les flèches montrent l'élargissement car b en fonction de a fait farien l'effet d'étirement de la courbe.

7.

lien ?

1) "c" car l'éq = $-1x^2 + bx + 1$

quel point ?

2) car "~~x~~" ne varie pas.

3) les flèches signifient que "b" en varis

Fait bouger le sommet des paraboles

De droit à gauche et de haut en bas

lien précis avec b ?

coordonnées ?

1) le point ~~a~~ sur l'axe des y car c'est le point d'intersection avec l'axe des y. On a remplacé x par 0 et on obtient...

2) oui car elles proviennent toutes de la même formule

?

3) Car on peut apercevoir que la courbe descend. C'est b qui a fait descendre la courbe

très incomplet, à préciser.

7 1) car l'intersection avec $Oy = (0, c)$ et que ... ? ...

2) ?

3) que le sommet de la parabole subit une translation vers le sens de la flèche, car les b varient

soyez plus précis.

7.

1° Toutes les courbes se rejoignent sur un point de Oy : (0; 1) ✓ car si on remplace x par 0 c'est égal à $1.(0)^2 + b.0 + 1$ donc $c = 1$. ✓

2° Oui car a ne varie pas, il ne s'éloigne pas ou ne se rapproche pas de zéro et donc, il n'y a pas d'évasement ni de compression. ✓ , uniquement une translation

3° Comme b varie les courbes sont ~~décroissantes~~

7.

1) les sommets sont tjs minimum parceque a > 0. ne répond pas à la question ?

2) oui parce qu'il s'agit de translation. l'affinité vaut tjs 1. → expliquez.

3) Cela signifie que l'abcisse (?) varie : il descend. ? de quoi ?

7. 1) l'intersection avec O_y est pour toutes au même endroit car elles ont toute le même c $(c=1)$
→ coordonnées du point commun?
2) Oui elles ont toutes la même forme car "a" ne varie pas et c'est lui qui fait changer la forme de la parabole : comment
3) le sommet des paraboles varie en fonction de b car $\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$; ici : $\frac{-b}{2a} = ?$
si on fait varier b régulièrement, les sommets varieront régulièrement également, (tout en fixant a).

w

7) 1) Le point commun se trouvera en y, car axe de symétrie est l'axe y et la courbe de départ passe par là, les autres, qui sont des isométries passent forcément par là.
?

2) oui, car elles n'ont subi qu'une translation, qui est une isométrie du plan, donc la forme ne changera pas.
→ pourquoi?

3) les flèches montrent le vecteur de translation avant et après la symétrie.

7

1) Point commun : Elle interceptent toutes un point précis sur l'axe des y

* Pourquoi ⊛car a fait varier la forme des parabole. Ici, a ne varie pas donc la forme ne change pas.

2) Oui, elle ont toutes la même forme car a ne varie pas ⊛

3) b fait varier la translation de la parabole. Quand b est positif, la parabole est translatée vers la ~~droite~~ et quand b est négatif, la parabole est translatée vers la ~~gauche~~. C'est pourquoi les flèches sont dirigées vers la droite et vers la gauche.

~~Si les flèches sont aussi dirigées vers le bas, c'est parce que la valeur de c change vers le négatif.~~

* Parce que la valeur de a ne change pas

→ rien à voir avec le 1)

7 1) Oui, toutes les paraboles se croiser
en 1 même point sur l'axe des y car
dans les cas présent "c" à la même ~~...~~ valeur
pour toutes les f(x) : quel est le pt commun ?
2) Oui, car a reste le même
pour toutes les f(x). a = ...

3) Ces flèches pourraient signifier que au plus
b sera grand au plus la parabole
sera orientée vers le côté négatif ou positif,
selon le signe de b, de l'axe des x.

7
1) car l'intersection avec oY est (0; c) et
dans ttes ces courbes, c est le même et vaut ...

2) car a est le même dans toutes les
courbes et que .....
3) Elles donnent le sens de la translation
effectuée par la variation de b.
→ à préciser.

7 1) oui : l'intersection a Oy car c ne varie pas donc

$y = a.0 + b.0 + c$

$y = c$

Que vaut c ?

⇒ coordonnées du pt commun ?

2) oui car a est a que détermine la forme de la courbe et dans notre cas a ne varie pas et vu que a reste tj positif le ~~parabole~~ sommet sera tj un minimum

a = ?

3) Cela s'appelle la concavité de la courbe

7) 1) c'est le point d'intersection avec y *

2) oui, ce sont des translations, isométries du plan. pourquoi ?

3) quand a, c sont fixés et que l'on fait varier b on translate les paraboles trop vague

a = 1

* si on remplace x par 0

⇔ $1 . 0^2 + b . 0 + 1$ ✓

$y = 1$

c'est le point $\in$ (.., ...)

7

1) le point de coordonné 1 à l'axe des y car c est +1.

soyez plus précis.

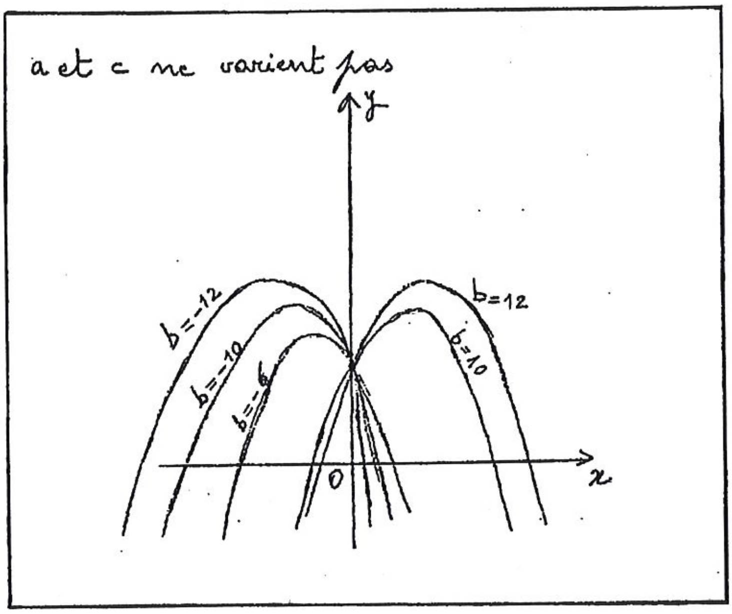
2) Non, car les affinité verticale et horizontales sont modifier à chaque fois ainsi que le point de coordonnée de sommet. A chaque fois b est modifier donc changement.

3) b désigne le sommet d'une parabole est la flèche exprime que il ont modifier par des nombres qui se succèdent → évolution.

Question 2

Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Commentez le dessin par rapport aux indications relatives à a,b et c qui sont mentionnées en répondant aux questions suivantes :

- Toutes les courbes ont-elles la même forme ? Pourquoi ?
- Il y a un point commun à toutes les courbes : Pourquoi ?
- Que dire de la position des sommets ? Justifiez vos affirmations.
- Quel est le signe de a ? Et celui de c ? Pourquoi ?



Réponses des élèves :

7

1) elles ont toutes la même forme parce que a ne varie pas et que ....

2) il y a un point commun sur l'axe des y car c ne varie pas et que (0, c) c'est l'intersection avec l'axe des y.

quoi?

3) les sommets varient selon b, plus la valeur absolue de b est grande, plus elle s'éloigne des axes x et y.

4) le signe de a est négatif car le sommet est maximum ✓

le signe de c est positif car le point d'intersection avec l'axe y est ~~positif~~ au-dessus de l'axe des x.

→ rien n'est justifié.

3) les sommets sont maximums pour 4 des courbes,
le sommet est opposé : pour b = -12 et b = 12 et pour
b = -10 et b = 10

5) a est négatif car le sommet de toute les courbes est maximum. ✓

c est positif car les courbes ont été translaté positivement par rapport à l'axe Oy. ??

7 1) oui, toute les courbe on la même forme puisque qu'elle appartienne toute à $y = ax^2 + bx + c$ et que a et c ne varient pas.

pas assez pr

2) Toute les courbes passe par le même point sur l'axe des y et tant donné que l'intersection avec l'axe des y est tjs (0, c), ici comme c ne varie pas, elle passe toute par le même point (0, c) ✓

3) La possition des sommets dépend de b. Si b est négatif, le sommet est à gauche de l'axe des y, si b est possitif, le sommet est à droite de l'axe des y. Ceci est donc normale, tout comme le disait la conjoncture énoncé en classe. ✓

4) le signe de a est est négatif, car le sommet de chaque courbe est un maximum. ✓
Pour c le signe est positif, puisque l'interse avec l'axe des y est (0, c) et que c est au dessus de l'axe des x. ✓

7

1) oui, elles ont toutes les mêmes formes parce que justement a et c ne varie pas.

pas assez précis.

2) elles passent toutes par un point de l'axe Oy parce que le ? de coord. c ne varie pas dans l'équation

3) ?

4) le signe de a > 0 parce les courbes sont vers le bas et c ?

7

ne suffit pas comme explication

1) oui car la valeur de b ne produit pas un étirement ou une compression sur la courbe mais la réduit ~~proportionnellement et si b ≤ 0 ou b ≥ 0 elle se trouve d'un coté de y~~,

2) car c détermine l'ordonnée à l'origine et comme c ne varie pas ce sera toujour la même ordonnée.

3) ce sont tous des sommets ~~min~~ car a est ~~positif. il se trouve d'un côté de la courbe par rapport si b est~~ positif ou pas.

4) ~~a > 0~~ car les sommet sont ~~minimum~~. c est positif car il détermine l'ordonné à l'origine sur la partie de y positive

7. 1) Oui toutes les courbes on la même forme car la valeur de a ne change pas et que....

2) Oui, il y a le point (0; c) qui est commun à toutes les courbes parce que c.......

3) La position du sommet varie avec la valeur de b

→ ne m'informe nullement !

4) a est négatife, car le sommet est un maximume. c est positive, car on le voit sur le schéma. ?

7. 1) car ~~c ne varie~~ pas

2) ?

3) les sommets son des max → position ?

4) le signe de a est négatif et c est posisif ✓ : pourquoi

7) 1) ?

2) Oui, elles passent toutes par la même ordonnée à l'origine parce que dans les paraboles de type $y = ax^2+bx+c$ la courbe passera toujours par $(0;c)$
et que ici c est....

3) ~~Ils sont maximums~~. position ?

4) a est négatif car les sommets des courbes sont maximums et donc $a<0$.

Signe de c ?

7

2a 4a

1) oui car a et c ne varie pas et c'est
la variation de b qui fait varier la courbe par des affinités
forme de la

2) : oui, le ? se croise toute en $(0, C)$ avec l'axe
Oy car si $X=0$: c'est l'intersection avec Oy.
et on sait que c ne varie pas.

3) : Les sommets sont tous maximum ce qui
position ? signifie que a est négatif.

au-dessus de ...

4) a est negatif car courbes maximum.
c est positif car les courbes se croisent au point C
(voir dessin)

la variation de

(7) 1) oui car a est fixé et c'est a qui fait varier la forme de la courbe. Comment ?

2) Oui, c'est c et comme il est fixé, toutes les courbes passent par ce point.

coordonnées ?

3) – ?

4) a est négatif, et celui de c positif.

pourquoi ?

7. 1) oui car on nous dit que a est fixé et a fait varier la courbe. comment ?

2) car c est fixé et l'intersection avec Oy = (0, C)

3) quand b est < 0 le sommet se trouve à gauche.
   " b est > 0 " se trouve à droite.

pourq

4) a est < 0 car les sommets sont maximum et c > 0 car le point d'intersection avec Oy est au-dessus du point O

7. 1) oui, parce que a ne varie pas et que donc ....
2) oui, l'intersection avec OY parce elle est égal à (0, c) V et c ne varie pas. V
3) pourquoi? – si b est négatif le sommet se trouve à gauche de l'axe des y. si b est > 0 alors le sommet se trouve à droite de l'axe des y.
– Plus la valeur absolue de b est élevé, plus l'ordonné du sommet est élevé.
4) c est positif parce que l'intersection avec l'axe des y se trouve au-dessus de l'axe des x. V
a est négatif, parce la concavité de la courbe est dirigée vers le bas. V

pourquoi?

comment?

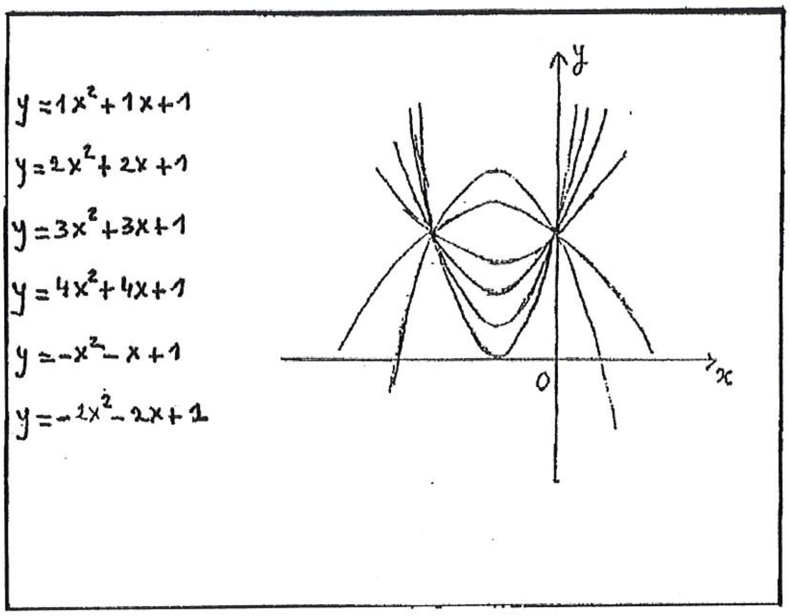
A) 1. Oui, car c'est a qui fait varier la forme de la courbe et ici, a ne varie pas.
2. Elles sont ttes la m̂ ordonnée sur Oy
3. Ts les sommets sont maximum ⇒ position? a<0
4. a<0 ⇒ sommet max
c>0 ⇒ m̂ ordonné sur l'axe des y, que se situe .....

? porce que c ne varie pas. V

Question 3

Dans l'encadré ci-dessous, figure un schéma d'observations faites au moyen d'une calculatrice graphique à propos des courbes $y = ax^2 + bx + c$. Expliquez ce dessin en répondant aux questions suivantes :

- Toutes les courbes passent par le même point sur l'axe des y : expliquez pourquoi. Quel est ce point ?
- Le dessin semble parfaitement symétrique par rapport à une droite verticale : de quelle droite s'agit-il et pourquoi ?
- Il y a un deuxième point par lequel toutes les courbes passent : quel est ce point ? Justifiez.
- Les courbes n'ont pas toutes la même forme : pourquoi ?



Réponses des élèves :

7\. 1) Les courbes passent toutes par le point $(0;1)$ parce que une courbe qui a une fonction de la forme $y = ax^2 + bx$ passe tjrs par le point $(0;c)$ et le c de chaque expression est le même : 1 ✓ (passent par le point $(0;c)$ ✓

pcq pour $x = 0$, $y = \cancel{a}.0^2 + b.0 + c$) ✓

2) $x = \frac{-1}{2}$ $\longrightarrow$ $x = \frac{-b}{2a}$ ✓ $= \frac{-1}{2.1} = \frac{-1}{2}$

ou $\frac{-2}{2.2} = \frac{-1}{2}$ (c'est la m̂ réponse pour chaque ẽq) → parce que ...

3) $(1;-1)$ $\longrightarrow$ ~~les f^{ns} sont obtenues par une translation effectuée sur la f^n $y = ax^2$, or $y = ax^2 \Longrightarrow y = -ax^2$ → pour un m̂ x, on a des y opposés~~

4) Dans les quatre premières formes $a > 0$, on a un étirement, dans les deux dernières $a < 0$, on a une compression → les étirements et compressions ne sont pas les mêmes puisque la valeur de a n'est pas la même.

7, 1) Car la courbe passe tjrs par le point (0;c) et c = ...

Si x=0 alors $y = 1.0^2 + 1.0 + 1 = 1 \Rightarrow (0;1)$

$y = 2.0^2 + 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow (0;1)$

2) la droite passe par x=-0,5 et k.y ?

pourquoi ?

3) (-1;1) Si x=-1 alors $y = 1(-1^2) + 1(-1) + 1 = 1$

$y = 2.(-1^2) + 2.(-1) + 1 = 1$

4) Car les équations sont différentes si l'on change les vecteurs ou (a;b;c) alors les courbes changes de formes.

1) Parce que la valeur de c est toujours la même. c=1, donc le pt sur Oy est ..?..

2) C'est la droite verticale, parallèle à Oy, d'équation x = (a) ?

(3) C'est un des deux point d'intersection des courbes ? parallèle au point d'intersection de l'axe des y.

4) Parce que la valeur de a est différente pour toutes les courbes et que ....

7. 1) Elles passent toutes par le même point c car il déplace la droite sur l'axe des y : ??

si x est égal à 0 : quel point précis ?

y = c

2) Il s'agit de l'axe de symétrie car c'est cette droite qui coupe la courbe en 2 parties égales càd ? pourquoi le m̂ axe pour ttes les courbes ?

3) ?

4) Les courbes n'ont pas toutes la même forme car elles ont chacune une équation différente.

coordonnées

7 1) c'est le point c (1) pourquoi ?

2) il s'agit de la droite parallèle à l'axe Oy car tous les sommets des paraboles sont alignés sur cette même droite ??

3) ?

4) car b ~~fait~~ varier la longueur des courbes.

7 1) car si on remplace x par 0
(pour calculer l'intersection avec y)
on obtient 1 pour touts les calculs
⇒ le pt est donc ....
2) la droit parralèle à
y qui coupe x en -1 : équation?
pourquoi?
3) par le point $(-2, 1)$ justification
4) parce que le nombre devant
x^2 est différent et que ... ? ...

- Aucune justification pour les
questions 2) et 3) !
- Trop peu précis.

4) les courbes n'ont pas toutes les mêmes
formes car l'affinité de coefficient a
change et parfois a est négatif et parfois
positive grâce à ce coéfficient on observe une
compression ou un étirement de la
parabole!

7.

1) elles passent toutes par le point (0, 1), car elles ont toutes la même valeur de "c" et que ......

~~2) la droite qui passe par le point (0, 1) et qui est parallèle à l'axe des "x".~~

3) elles passent aussi par le point (-1, 1), car elles ont toutes ~~le même sommet~~ et se sont des paraboles. ?

4) car elles n'ont pas toutes la même valeur de "a". ce qui fait varier la forme de la courbe : comment ?

7) 1) elle passe toute par le m point car dans leur fonction ? c est toujours égal à 1, il ne varie pas.
le point d'intersection à pour coordonés (0 ; 1) √

2) Il s'agit de l'axe qui a pour ~~coordonée~~ équation

$x = -1/2$ √

toutes les courbes ont le m axe car le rapport
$-b/2a$ ne varie pas, il est tjrs. égal à $-1/2$ √
puisque ......

3) C'est le point de coordonée (-1 ; 1) √ il est
image du point (0 ; 1) par la symétrie orthogonale
d'axe $x = -1/2$

4) comme a n'est pas le m partout
les courbes n'ont pas la m forme.
a fait varier l'affinité verticale qui déforme ~~de~~ la
courbe $y = x^2$

7 1) On a dé montré en classe que l'intercection avec Oy était (o;c) et comme c est toujours égal a 1, elles passent toutes par le point (o;1) ✓

2) La droite est x = ?

3) Il y a un axe de symétrie donc il y a une image qui se forme (gauche et droite), donc, a droite il y un point (o;c) et a gauche, son image. → quelles coordonnées?

4) On a vu en classe que a faisait élargir ou rétrécir la forme de la courbe et comme a n'est jamais le même, la courbe n'a jamais la même forme.

soyez plus précis.

7.

1) C'est ~~voici car~~ le point $(0 ; 2)$ car en ~~simplifie~~ raison
l'équation en remplaçant x par 0

→ l'avez-vous fait ?

2) de la droite $x = -1$ car

3) C'est le point $(-2 ; 2)$ par symétrie avec l'axe vertical
$x = -1$

4) parce que a, b et c font que les courbes changent de formes.

7. 1) Toutes les courbes passent par le point (0;1) car c'est le seul point que l'on ne fait pas varier. Il reste toujours identique ??

2) Il s'agit de l'axe de symétrie ~~$x=$~~ ½ ~~;0~~ car si on applique la formule pour trouver l'axe de sym. $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, on peut remarquer qu'il sera toujours le même puisque ....

3) Elles passent toutes aussi par le point (1;1) car puisque l'on connait l'axe de symétrie et l'ordonnée à l'origine, on peut trouver l'autre point par symétrie. √

Bibliographie

[1] A. Sierpinska, *The concept of function*, Guershon et Ed Dubinsky.

[2] F. Van Dieren-Thomas, *De question en question 1*, Didier Hatier, Bruxelles, 1996.

[3] GEM, *De question en question 3*, Didier Hatier, Bruxelles, 1996.

[4] Adam-Close-Lousberg-Tromme, *Espace Math 3*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1996.

[5] Cojerem, *Des situations pour enseigner la géométrie*, guide méthodologique, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1995.

[6] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, guide méthodologique, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.

[7] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, manuel pour l'élève, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.

[8] A. Chevalier, D. Degen, C. Docq, M. Krysinska, G. Cuisinier, C. Hauchart, *Référentiel de mathématiques*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 2002.

[9] GEM, *De question en question 2*, Didier Hatier, Bruxelles, 1994.

[10] CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels, La linéarité comme fil conducteur*, 2002.

[11] F. Ayres, *Differential and integral Calculus*, Schaum's outline series, 1964.